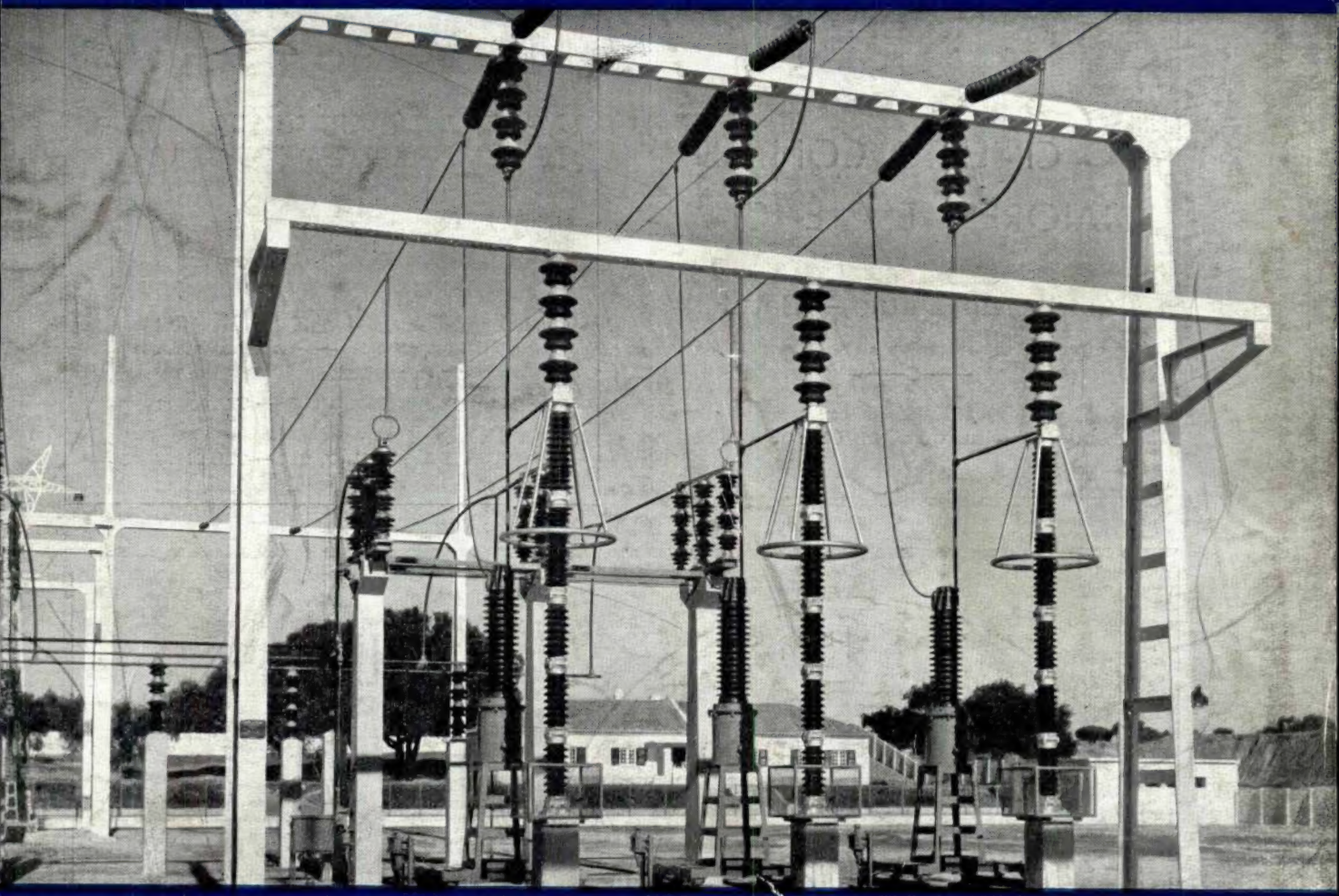
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.° 230-MARÇO-1953

CIMENTO SECIL

O CIMENTO COM AS MAIORES RESISTÊNCIAS

Fábrica no Outão — Setúbal

Lisboa — Rua do Comércio, 56-3.º

ELECTRO-ARCO
LIMITADA

ELECTRODIOS
POSTOS E ACESSORIOS
PARA A SOLDADURA ELECTRICA

MATERIAL APROVADO PELO
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
VENDA NOVA — AMADORA
LISBOA
RUA SILVA CARVALHO, 239 — TEL 63649
PORTO
RUA DO BOLHÃO, 216 — TEL 21277

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano XXVIII - N.º 230 Março de 1953

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-N. * TELEF. 70144 (Linha 50

DIRECTOR
MANUEL ALVES MARQUES

ADMINISTRADOR
JOSÉ MANUEL DA CRUZ MORAIS

SECRETÁRIO
FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA

CORPO REDACTORIAL
DUARTE LINO PIMENTEL
FERNANDO ALVES DA SILVA
JOÃO MADEIRA COSTA
NUNO M. DE ALMEIDA ALVES

NUMERO AVULSO 12$50

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	32$50	50$00	95$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	55$00	100$00

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Sub-estação de Setúbal — Protecção contra sobretensões da rede de 150 kV da C. N. E.

Págs.

A disciplina do trabalho intelectual
Pelo Eng.º Quím.-indust. (I. S. T.) Luís A. de Almeida Alves. . . 329

Estudo do rótor de uma turbina de gás
Pelo Eng.º Mec. (I. S. T.) José Henrique Arandes 333

Vida Escolar e Associativa — Pontos de exame 346

Semana de Máquinas 348

Aplicação do gráfico de Leach
Pelo Eng.º Civil (E. E.) Baptista Júnior 349

Determinação do grau de encastramento dos maciços de fundação
Pelo Eng.º Civil (I. S. T.) Úlpio do Nascimento 357

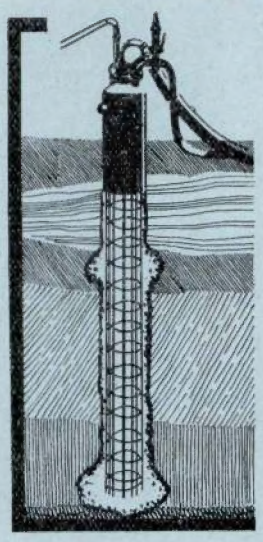
Notas informativas — **Elementos sobre a produção e consumo de energia na rede eléctrica nacional** 360

Outro caso de ataque do «teredo»
Pelo Eng.º Civil (I. S. T.) Raul da Silva Marques 361

Do Mundo Técnico 365

Biblioteca 381

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES



AS ESTACAS *Forum*

COM EXTRACÇÃO DO TERRENO E BETONAGEM POR AR COMPRIMIDO, CONSTITUEM UM PROCESSO DE EXECUÇÃO ECONÓMICO QUANDO NÃO É DE ACONSELHAR O EMPREGO DE UM BATE-ESTACAS: JUNTO DE PRÉDIOS QUE AMEAÇAM RUINA, EM ESTALEIROS DE REDUZIDO ESPAÇO LIVRE, NA CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES, ETC.

AS ESTACAS FORUM SÃO EXECUTADAS COM AUSÊNCIA TOTAL DE VIBRAÇÕES, FUMOS E RUÍDOS.

FUNDAÇÕES FRANKI

SOCIEDADE CONSTRUTORA PORTUGUESA L.DA

PRAÇA DA ALEGRIA 20 R/C LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

CONTRA A HUMIDADE

FABRICA EM SACAVÉM

TELEFONES { 4 2651 / 4 2156 TELEG. EPALDA—LISBOA

TÉCNICA

DIRECTOR — MANUEL ALVES MARQUES ADMINISTRADOR — JOSÉ M. CRUZ MORAIS
SECRETÁRIO — FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA
CORPO REDACTORIAL — DUARTE LINO PIMENTEL, FERNANDO M. ALVES DA SILVA, JOÃO M. MADEIRA COSTA, NUNO M. ALMEIDA ALVES

Ano XXVIII - N.º 230 Março de 1953

C. D. 171.91

A DISCIPLINA DO TRABALHO INTELECTUAL

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES
Professor do I. S. T.

O significado humano que o exemplo dos grandes homens deveria atingir no equilíbrio final dos sucessivos julgamentos da História, é muitas vezes ofuscado pela apreciação exclusiva do aspecto concreto das suas realizações. De certo modo, a História não pode eximir-se a exercer uma acção erosiva sobre o conjunto dos diferentes aspectos da vida do indivíduo, conservando apenas a parte indestrutível de projecção universal. Só assim se conseguem definir progressivamente os contornos e as linhas gerais da estrutura da civilização; mas, nesse trabalho de síntese e de crítica, vai-se perdendo, como é natural, o sentido educativo dos factores psicológicos e morais que constituem sempre os pontos de partida na interpretação racional das tendências dos homens e dos resultados da sua actuação.

Quando o turista do século XX, na sua avidez de cultura, se esforça por «sentir» nas Igrejas e nas galerias de Florença ou de Roma, as obras primas dos grandes mestres do Renascimento italiano, raras vezes se lembra de que essas obras são quase sempre um reflexo fiel da personalidade dos homens que as criaram e das condições do meio em que tiveram de viver. Não é por um simples acaso que as formas vigorosas e dinâmicas do «Juízo Final» podem ter tido a mesma origem que as expressões de tristeza e de abandono das figuras das «Pietá». Qualquer delas traduz com exactidão, embora de maneira diferente, o carácter complexo de Miguel Ângelo, nos seus aspectos salientes de energia inesgotável e de pessimismo quase doentio. E são estes factores humanos que se sobrepõem invisìvelmente à herança artística que a posteridade recebeu e que constituem um campo ilimitado de ensinamentos e de meditação.

Miguel Ângelo foi um exemplo curioso de «indisciplina intelectual», de vontade mal orientada, de atracção pela «volúpia de sofrer». Ele próprio descreve o seu esgotamento, a sua existência sem descanso, a sua ruína física; e é ele também que glorifica o sofrimento no célebre verso «Mille piacere non vaglion un tormento!...» no qual se revela todo o seu complexo de amargura e de inquietação.

Não se pode negar é certo, que é muito difícil manter dentro dos limites apertados da lógica, aquela força interior que impulsiona o curso da vida dos grandes «génios». Nisso reside até certo ponto, a essência real da sua actuação. Mas pode-se pretender pelo menos, que a sua energia não se degrade inùtilmente em actividades secundárias, que também esgotam e fatigam, mas que nada têm de genial.

Por isso mesmo, não se pode censurar em absoluto que Miguel Ângelo fosse incapaz de trabalhar com método, que aceitasse encomendas irrealizáveis, que faltasse a muitos dos

compromissos tomados. Nem mesmo que, no entusiasmo intenso da execução das suas obras, vivesse uma existência miserável, comendo pouco, dormindo vestido e calçado, descurando a saúde e sacrificando o bem estar. O que se torna criticável nessa actividade febril é a sua preocupação de tudo querer fazer, de ser ao mesmo tempo o artista e o capataz, de perder anos de vida em trabalhos vulgares de exploração de pedreiras, de construção de estradas, de transporte de materiais. E neste aspecto fundamental, não basta a sua qualidade de «génio» para o desculpar.

Na vida de todos os dias, em que os «génios» são raros e em que todos têm uma missão específica a cumprir, menos se justifica ainda a tendência para esta «indisciplina» de realização que se opõe, como um obstáculo poderoso, ao equilíbrio estável da estrutura típica da Sociedade actual.

* * *

Quem conheça de uma maneira apenas superficial a contribuição dada por Taylor aos problemas de organização, pode ser conduzido talvez à ideia simplista de que ela se resumiu à cronometragem dos movimentos elementares e ao estabelecimento de salários baseados em tarifas diferenciais ([1]). Mas na realidade, a sua acção foi muito mais vasta e muito mais importante.

Não falando já da sua interferência em problemas de ordem técnica — que se tornou notável pelo papel desempenhado no domínio dos aços rápidos — há que reconhecer em Taylor o percursor daquilo que se pode chamar a «disciplina do trabalho», sem a qual as modernas organizações industriais nunca poderiam ter sido estruturadas. Na fase da sua vida em que exerceu funções de capataz em oficinas de construção mecânica, foi forçado a reconhecer que não era possível conjugar, com rendimento, os trabalhos de rotina com os problemas de aperfeiçoamento e de progresso; e por isso, quando atingiu lugares de direcção, introduziu nas organizações de que fazia parte, um certo número de «especialistas funcionais» responsáveis por pormenores específicos de estudo de tempos, de previsão de prazos, de controle de qualidade e de cálculo de preços de custo.

A introdução destes novos elementos de trabalho que aliás, se têm conservado até aos nossos dias, embora seguindo a evolução normal de todos os processos, criou como é natural, uma maior complexidade de organização só possível à custa da «disciplina funcional» dos diferentes elementos estruturais. E essa disciplina não podia deixar de ser fundamentalmente uma «disciplina executiva» dentro dos objectivos da orgânica estabelecida e das funções específicas a desempenhar.

Mas, à medida que a estrutura técnica se foi tornando mais complicada surgiram lògicamente dois novos aspectos dos problemas primitivos de organização — a *orientação geral em larga escala* e a *complexidade crescente na execução.*

Estes novos aspectos fazem nascer um novo conceito de disciplina, que já não é a disciplina meramente executiva, mas sim *a disciplina do trabalho intelectual* dos elementos de orientação e de investigação — ou seja das articulações mais complexas da estrutura técnica — sem a qual não é possível garantir o funcionamento constante e eficaz das articulações mais simples, por lhes poderem vir a faltar as directrizes de actuação.

Já se disse ([2]) que «as articulações mais complexas vão entrando progressivamente na zona dos problemas mal definidos e parcialmente documentados e começam a ser dominadas pelo espectro do compromisso entre a perfeição e o tempo». Mas não se pode esquecer que o trabalho intelectual — anàlogamente ao que se passa com o trabalho físico — não pode ultrapassar os limites impostos pela *fadiga* e pela *saturação;* e por isso, para

---

([1]) Designa-se por tarifa diferencial aquela que, nos trabalhos pagos à peça, fixa um valor mínimo de unidades a produzir, pagando um valor inferior por unidade se não se atingir esse mínimo fixado.

([2]) «A Responsabilidade na Hierarquia Técnica», Técnica n.º 228, Janeiro de 1953.

um dado valor da intensidade normal de trabalho, há também uma quantidade máxima que não se pode exceder, sob pena de se atingirem aqueles limites e se entrar, como consequência, na zona perigosa dos baixos rendimentos de acção.

Em todo o caso, é relativamente fácil manter a disciplina do trabalho intelectual nos problemas de orientação — basta normalmente a preparação cientifico-técnica, a constituição de quadros e a definição de funções. Mas, nos problemas que envolvem a fixação de novos métodos ou que se estendem aos domínios menos definidos da pesquisa ou dos projectos complexos, essa disciplina é bastante mais difícil de conseguir porque não pode deixar de estar sujeita, por vezes, à acção de factores imponderáveis ou de demoras necessárias mas impossíveis de controlar.

* * *

Quando se estudaram as condições de estabilidade do equilíbrio da estrutura técnica [1] estabeleceram-se entre outras, duas condições de equilíbrio das articulações complexas, que se podem considerar como complementares e que são:

> «Que se libertem progressivamente dos trabalhos que podem ser realizados por articulações mais simples».
>
> «Que continuem a estudar o aspecto teórico (e parcialmente prático, quando possível ou vantajoso) das articulações mais simples que delas dependem».

O conjunto destas duas condições poder-se-ia reunir num «slogan» que, embora tomado com uma certa reserva, não deixa de corresponder fundamentalmente à verdade: «Cansar-se o menos possível e aprender o mais possível».

Nesta frase contém-se, por assim dizer, o segredo da disciplina do trabalho intelectual. Na realidade, «cansar-se o menos possível» não quer dizer trabalhar pouco, mas apenas cumprir a missão individual numa zona afastada do limite da *fadiga* e, portanto, nas melhores condições de rendimento; por outro lado, «aprender o mais possível» não significa enveredar por um enciclopedismo superficial, mas aproveitar o tempo disponível em aumentar a cultura técnica ao nível da articulação considerada, sem nunca atingir o limite da *saturação* e, por consequência, em condições de poder reflectir intensamente sobre os conhecimentos que se adquirem e que terão de ser aplicados

Os problemas industriais estão sendo cada vez mais difíceis de resolver porque se procuram rendimentos sucessivamente crescentes, à custa de matérias-primas que vão empobrecendo e cuja obtenção se vai tornando gradualmente mais difícil. Encarando com realismo esta situação que aliás, resulta de uma evolução natural, a «President's Materials Policy Commission» americana, faz as seguintes recomendações à indústria de uma maneira genérica [2]:

1) Criar novas técnicas da pesquisa.
2) Estudar e desenvolver melhores processos.
3) Utilizar os processos cíclicos em maior escala.
4) Aprender a trabalhar com baixas concentrações.
5) Conservar os recursos naturais.
6) Utilizar materiais de substituição.

Mas estes resultados só se conseguem, como afirma também essa Comissão, à custa de novos processos aperfeiçoados porque «o recurso mais forte e mais flexível na luta con-

---

(1) «A Estabilidade da Estrutura Técnica», Técnica, n.º 225, Outubro de 1952.
(2) «Chemical Engineering», Março de 1953, pág. 338.

tra a falta de materiais é a tecnologia». E a indústria só pode avançar com segurança no caminho do progresso tecnológico, se houver disciplina do trabalho intelectual em todos os níveis da sua estruturação a fim de que o trabalho produzido seja alguma coisa mais do que o esgotamento contínuo e desordenado das energias individuais.

* * *

Num artigo com o título «Industrial Viewpoints on Separation Processes», publicado na revista «Chemical Engineering Progress» de Outubro de 1952, o seu autor, Karl H. Hachmuth, faz uma introdução muito perfeita que se transcreve a seguir:

«Os processos de separação, tais como a destilação fraccionada, a extracção por dissolventes e outros, são fundamentalmente análogos. A aplicação industrial de novos processos de separação a velhas separações ou então de processos de separação correntes a novas separações, torna-se muito mais fácil de compreender quando se conhecem as semelhanças inerentes. Têm de se usar certos critérios e existem sempre certas limitações quaisquer que sejam os processos de separação aplicados. Este artigo passa em revista os princípios de projecto e de funcionamento dos processos de separação, sob o ponto de vista de aplicação industrial. Fornece um guia prático por meio do qual se pode avaliar ràpidamente a facilidade ou dificuldade de uma dada separação. Sugere um método para atacar problemas de separação difíceis. Expõe um método para calcular a separação numa torre, sem exigir um cálculo prévio do efeito das correntes de circulação dos andares subsequentes. Indica um processo para calcular equilíbrios não ideais de fases de vários componentes, a partir de equilíbrios de fases binárias, fàcilmente obtidos. Houve sempre a preocupação de obter soluções práticas para os problemas de separação num espaço de tempo razoável. Sempre que se torna necessário, utilizam-se métodos rigorosos, mas quando esses métodos são incómodos ou morosos são substituídos por métodos aproximados que possam satisfazer aos objectivos de ordem prática».

Nesta introdução, o autor teve a preocupação de definir claramente os dois princípios fundamentais que presidiram à orientação do artigo:

1) Considerar um método geral para todos os processos de separação por equilíbrio de fases (destilação fraccionada, destilação extractiva, destilação azeotrópica, absorpção de gases, esgotamento de óleos, extracção por dissolventes, adsorpção), quando é norma corrente considerá-los separadamente sem fazer intervir, muitas vezes, as semelhanças existentes.

2) Recorrer aos métodos aproximados e expeditos naqueles casos em que as condições dos problemas justificassem ou aconselhassem a sua aplicação.

Em última análise estes dois princípios — de síntese e resolução prática — definem a disciplina do trabalho intelectual nos cálculos industriais; e, por isso, devem estar sempre na base das complexas organizações funcionais da Indústria dos nossos dias. Mas não se pode esquecer, por um lado, que qualquer trabalho de síntese só pode ser efectuado sobre um conjunto de elementos de pormenor rigorosamente estudados e definidos e, por outro lado, que os processos simplificados de resolução só podem ser encarados depois do estabelecimento definitivo dos métodos rigorosos e gerais. E, para atingir estes objectivos, não se pode prescindir de um esforço exaustivo de preparação, de reflexão e de estudo, sem o qual a disciplina do trabalho intelectual não pode deixar de ser naturalmente frágil, por não existirem os meios de acção indispensáveis à garantia da sua estabilidade e da sua projecção.

C. D. 621.438.2 — 253-1

ESTUDO DO RÓTOR DE UMA TURBINA DE GÁS

PELO ENG.º MEC. (I. S. T.) JOSÉ HENRIQUE ARANDES
Assistente do I. S. T.

A casa suiça «Oerlikon» construíu há uns seis ou sete anos uma instalação de turbina de gás, para ensaios, com uma potência útil de 1.000 kW. A instalação comporta duas turbinas, uma de alta e outra de baixa pressão, o que se justifica sobretudo por razões de estudo e de ensaios termodinâmicos. A primeira turbina gira a 3.000 rot/min e fornece a potência útil accionando um alternador. É do estudo do rótor de uma turbina com as características da turbina de alta pressão daquela instalação de ensaios que trata o presente artigo, extraído de um projecto elaborado para efeitos de exame final de curso.

O rótor da turbina é formado por cinco discos que constituem uma peça só com o veio, o que tem por fim aumentar a solidez do conjunto (Fig. 1).

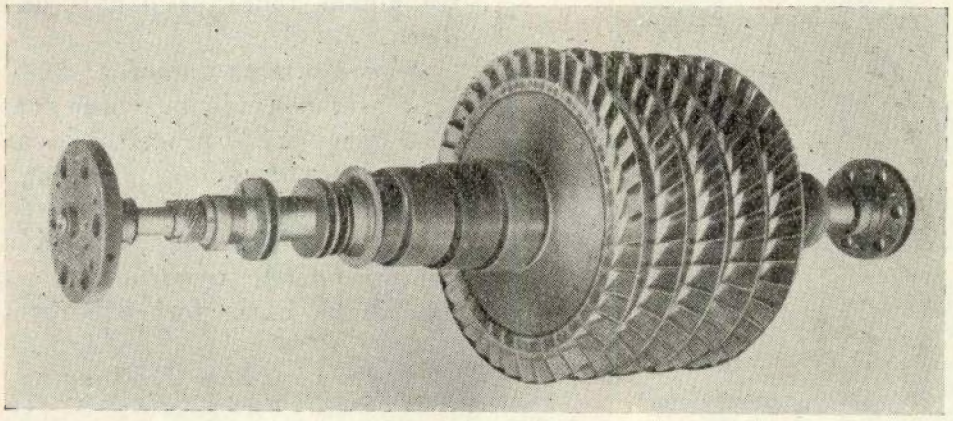


Fig. 1

O estudo que vamos fazer incidirá sobre o cálculo da resistência dos discos, incluindo uma avaliação aproximada das fadigas térmicas, e a determinação da velocidade crítica do veio.

a) *Cálculo da resistência dos discos* — Os discos da turbina têm por missão transmitir ao veio os impulsos tangenciais sobre as pás, devidos à acção dos gases. No entanto, estes esforços tangenciais não têm nenhuma importância — sob o ponto de vista da resistência dos discos — quando comparados com as forças centrífugas a que eles ficam submetidos em virtude do seu movimento de rotação. No nosso cálculo atenderemos, pois, apenas a estas últimas.

Os discos são de igual resistência e cheios no cubo, pelo que teremos de tomar em conta ùnicamente as condições no contorno exterior, ou coroa, onde são fixadas as pás.

Os cinco discos são aproximadamente iguais, embora o seu diâmetro exterior diminua um pouco do primeiro para o

quinto. Mas como aqui é maior a fadiga provocada pelas pás, poderemos verificar apenas a resistência do último disco.

1.º — *Cálculo da coroa* — Suponhamos, como faz Stodola, que as pás e o disco formam uma peça só. Nestas condições, as pás exercem na superfície cilíndrica de raio x_2 e largura y_2 (Fig. 2) uma fadiga igual a σ_2, por causa das forças centrífugas a que estão sujeitas.

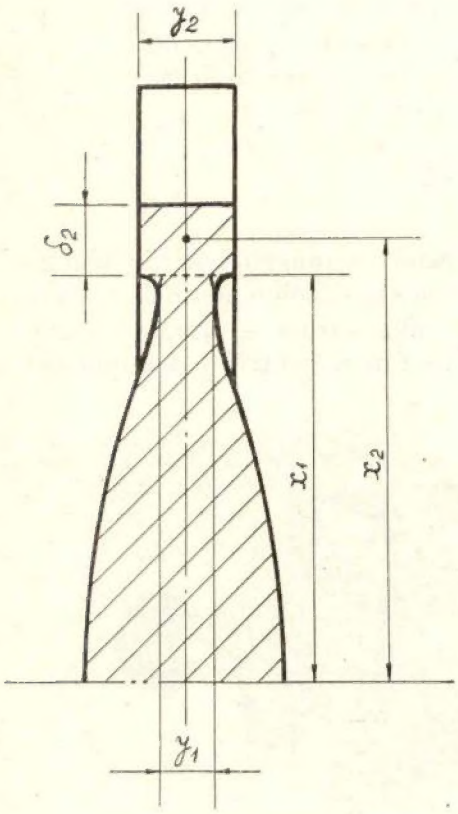


Fig. 2

A coroa vai sofrer então uma deformação radial ξ'_1 provocada pela força centrífuga que sobre ela actua, pelos esforços radiais do disco que originam uma fadiga σ_{r1} no raio x_1 e pela carga τ_2 das pás, tendo aquela o valor (Stodola):

$$\xi'_1 = \frac{x^2_2}{E.\ \delta_2 . y_2}\left(\sigma_2 . y_2 + \mu . \omega^2 . \delta_2 . y_2 . x_2 - \right.$$
$$\left. - \sigma_{r1} . \frac{x_1 . y_1}{x_2}\right)$$

Como a coroa está ligada ao disco, aquela deformação radial deve ser igual à que o disco sofre, na periferia, por virtude das tensões a que ele próprio está submetido.

Para um disco de igual resistência, a deformação radial no raio x_1 é dada por

$$\xi_1 = \frac{1-\nu}{E} . \sigma . x_1$$

onde ν é uma constante, igual ao inverso do módulo de Poisson, cujo valor médio para o aço regula por 0,3.

A condição $\xi_1 = \xi'_1$ permite-nos escrever

$$\frac{1-\nu}{E} \sigma . x_1 = \frac{x^2_2}{E . \delta_2 . y_2}\left(\sigma_2 . y_2 + \mu . \omega^2 . \delta_2 . y_2 . x_2 - \right.$$
$$\left. - \sigma . \frac{x_1 . y_1}{x_2}\right)$$

pois, por o disco ser de igual resistência, vem $\sigma_{r1} = \sigma$.

Naquela equação, μ representa a massa específica do material da coroa, ω a velocidade angular e σ a fadiga uniforme a que trabalham todos os pontos da massa do disco.

A secção recta da coroa, definida por y_2 e δ_2, foi estabelecida de acordo com as dimensões das pás e o processo de fixá-las. Por isso, a equação acima pode servir-nos para calcular y_1.

A força centrífuga devida a uma pá, compreendendo o corpo e a parte do pé exterior ao disco, forneceu-nos o valor:

$$F = 2.850 \text{ kg}$$

Na coroa do disco estão montadas 43 pás e por outro lado, é $x_2 = 38$ cm e $y_2 = 4$ cm, por construção. Logo,

$$\sigma_2 = \frac{43 . (F + F')}{2 . \pi . x_2 . y_2} = \frac{43 \times 2.850}{2 . \pi . 38 \times 4} \cong 130 \text{ kg/cm}^2$$

O material empregado no fabrico dos discos tem um peso específico de 7,75 gr/cm³.

A sua massa específica é, pois,

$$\mu = \frac{7,75}{980 \times 10^3} = 79 \times 10^{-7} \text{ kg . seg}^2/\text{cm}^4$$

Vamos admitir aqui uma fadiga σ de 350 kg/cm², uma vez que teremos de atender ainda a fadigas de origem térmica.

Substituindo estes valores na equação anterior, com $x_1 = 36$ cm, vem

$$(1 - 0{,}3) . 350 . 36 = \frac{38^2}{4 . 4} \left(130 . 4 + \right.$$

$$\left. + 79 . 10^{-7} . 10^4 . \pi^2 . 4 . 4 . 38 - 350 . \frac{36 . y_1}{38} \right)$$

ou,

$$8 . 825 = 90{,}5 \, (520 + 480 - 332 \, y_1)$$

donde

$$y_1 = \frac{903}{332} \cong 3cm$$

2.º — *Cálculo do disco de igual resistência* — Um disco de igual resistência obedece à condição de todos os seus pontos trabalharem com a mesma fadiga σ. O perfil dum disco de igual resistência é o mais conveniente, porque corresponde ao melhor aproveitamento do seu material.

A equação fundamental de equilíbrio de todas as forças que actuam em cada elemento do disco, no seu movimento de rotação, tem a forma (Stodola)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\mu . \omega^2}{\sigma} x . y = 0$$

Integrando esta equação diferencial, obtemos o perfil

$$y = y_a . e^{-\frac{\mu . \omega^2}{2 \sigma} x^2}$$

onde y é a espessura do disco referente ao raio x e, portanto, y_a é a espessura no centro do disco ($x = o$).

Já sabemos que para $x = x_1 = 36$ cm vem $y = y_1 = 3$ cm, e então podemos agora não só calcular y_a, como também qualquer outra espessura intermédia.

Determinemos primeiro y_a. Ora,

$$y_a = y_1 . e^{\frac{\mu . \omega^2}{2 \sigma} x^2_1}$$

O valor do expoente de e será

$$\frac{\mu . \omega^2}{2 \sigma} . x^2_1 = \frac{79 . 10^{-7} . 10^4 . \pi^2}{2 . 350} . 36^2 = 1{,}45$$

E assim,

$$y_a = 3 . e^{1{,}45} = 12{,}8 \ cm$$

Determinemos a seguir algumas espessuras intermédias, a fim de podermos traçar o perfil do disco.

Para $x = 10$ cm, vem

$$y = y_a . e^{-\frac{\mu . \omega^2}{2 \sigma} x^2} = 12{,}8 \times e^{-1{,}115 . 10^{-3} . 10^2} \cong 11{,}5 cm$$

Para $x = 17{,}5$ cm (ligação com o veio):

$$y = 12{,}8 \times e^{-1{,}115 . 10^{-3} . 306} \cong 9{,}1 \ cm$$

Para $x = 20$ cm,

$$y = 12{,}8 \times e^{-1{,}115 . 10^{-3} . 4 . 10^2} \cong 8{,}4 \ cm$$

Para $x = 30$ cm,

$$y = 12{,}8 \times e^{-1{,}115 . 10^{-3} . 9 . 10^2} \cong 4{,}7 \ cm$$

3.º — *Fadigas nos orifícios excêntricos* — No disco, junto à coroa, existem 20 orifícios, de pequeno diâmetro, que permitem equilibrar as pressões nas duas faces e diminuir assim o impulso axial sobre as chumaceiras. Verifiquemos a fadiga nesses orifícios.

Se os orifícios não existissem, a deformação específica, radial ou tangencial, seria

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu . \sigma_t) =$$

$$= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu . \sigma_r) = \frac{1 - \nu}{E} \sigma$$

pois, num disco de igual resistência σ, as duas fadigas, radial e tangencial, são iguais.

Havendo os orifícios, desaparecem completamente as fadigas radiais nos pontos A

(Fig. 3) e as fadigas tangenciais nos pontos B da mesma figura.

Nos primeiros pontos, o desaparecimento das fadigas radiais provoca um aumento da fadiga tangencial. O equilíbrio, no entanto, será mantido se a deformação radial específica permanecer a mesma.

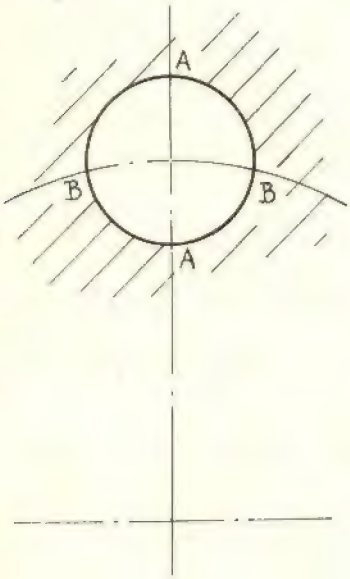


Fig. 3

A nova fadiga tangencial σ_t será, então, tal que

$$\varepsilon_r = \frac{\nu \cdot \sigma_t}{E} = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma$$

donde

$$\sigma_t = \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \sigma$$

De modo análogo, o desaparecimento das fadigas tangenciais nos pontos B provoca um aumento da fadiga radial tal que haverá equilíbrio quando

$$\varepsilon_t = \frac{\nu \cdot \sigma_r}{E} = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma$$

donde se tira

$$\sigma_r = \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \sigma$$

A nova fadiga, tangencial nos pontos A e radial nos pontos B, será

$$\sigma' = \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \sigma = \frac{1-0{,}3}{0{,}3} \cdot \sigma = 2{,}33 \times 350 \cong$$
$$\cong 800 \ kg/cm^2$$

Verificamos que a fadiga no contorno interior dos orifícios passa a ser um pouco superior ao dobro da fadiga que existiria no caso do disco ser todo cheio.

Esta conclusão está de acordo com o estudo feito por Lucini para a determinação da fadiga no contorno interior dum disco com orifício central, onde a fadiga tangencial passa a ser ligeiramente maior que o dobro da fadiga relativa a um disco cheio, por mais pequeno que seja o orifício.

Concluímos daqui que os orifícios, quer centrais quer excêntricos, são sempre perigosos por causa da concentração de esforços que produzem. Evita-se em grande parte esta concentração de esforços mandrilando e polindo aqueles furos (Godsey e Young).

De qualquer modo, no nosso caso podemos consentir as fadigas calculadas.

b) *Cálculo aproximado das fadigas térmicas* — A determinação das fadigas provocadas pelo aquecimento desigual dos discos, quando em funcionamento, fica simplificada se atendermos a que essas fadigas são independentes das originadas pela força centrífuga. Quer dizer, podemos calcular as fadigas térmicas supondo o disco parado e as fadigas totais serão obtidas pela sua soma com as da força centrífuga, já avaliadas.

Nestas condições, consideremos uma circunferência de raio x e suponhamos que este passa a ter o valor $x + \xi$ depois do aquecimento. Se a circunferência estivesse livre, para um aumento de temperatura igual a Δt em todos os seus pontos, o raio sofreria um aumento de

$$\xi' = \varepsilon \cdot x \cdot \Delta t$$

onde ε é o coeficiente de dilatação linear do material.

A deformação elástica vai ser apenas a diferença, ou seja

$$\xi'' = \xi - \xi'$$

Daqui resulta uma deformação tangencial específica

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(x+\xi'') - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{\xi''}{x} = \frac{\xi}{x} - \varepsilon \,.\, \Delta t$$

De modo análogo, se considerarmos uma outra circunferência de raio $x + dx$, o elemento radial dx passa a ser igual a $d\,\xi$. A dilatação livre seria responsável pelo aumento $\varepsilon \,.\, \Delta t \,.\, dx$, logo a deformação elástica radial específica é

$$\varepsilon_r = \frac{d\xi - \varepsilon \,.\, \Delta t \,.\, dx}{dx} = \frac{d\xi}{dx} - \varepsilon \,.\, \Delta t$$

Sabe-se que

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\,(\sigma_r - \nu \,.\, \sigma_t) \\ \varepsilon_t = \dfrac{1}{E}\,(\sigma_t - \nu \,.\, \sigma_r) \end{cases}$$

Daqui tiramos que as fadigas, radial e tangencial, à distância x do eixo, valem

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\nu \,.\, \left(\dfrac{\xi}{x} - \varepsilon \,.\, \Delta t\right) + \dfrac{d\xi}{dx} - \varepsilon \,.\, \Delta t\right] \\ \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\dfrac{\xi}{x} - \varepsilon \,.\, \Delta t + \nu \,.\, \left(\dfrac{d\xi}{dx} - \varepsilon \,.\, \Delta t\right)\right] \end{cases} \quad (1)$$

Por supormos o disco parado, a equação diferencial de equilíbrio das forças que actuam em cada elemento do disco escreve-se apenas (Stodola; Lucini):

$$\frac{d\,(xy\,\sigma_r)}{dx} - y \,.\, \sigma_t = 0$$

Substituindo σ_r e σ_t pelos seus valores, esta equação fundamental apresenta a seguinte expressão

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left[\frac{d\,(\log y)}{dx} + \frac{1}{x}\right]\frac{d\xi}{dx} + \left[\frac{\nu}{x}\,\frac{d\,(\log y)}{dx} - \frac{1}{x^2}\right]\xi - \varepsilon \,.\, (1+\nu)\,\frac{d\,(\Delta t)}{dx} - \varepsilon \,.\, (1+\nu)\,\frac{d\,(\log y)}{dx} \,.\, \Delta t = 0$$

No nosso caso, é conhecido o perfil do disco, ou seja, a função $y = f(x)$, que é

$$y = y_a \,.\, e^{-\frac{\mu \,.\, \omega^2}{2\sigma}\,x^2} = y_a \,.\, e^{-\alpha \,.\, x^2}$$

Por isso,

$$\log y = \log y_a - \alpha \,.\, x^2$$

e

$$\frac{d\,(\log y)}{dx} = -2\,\alpha \,.\, x = \beta \,.\, x$$

Entrando com este valor na equação fundamental, vem

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\beta \,.\, x + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\beta \,.\, \nu - \frac{1}{x^2}\right)\xi - \varepsilon \,.\, (1+\nu)\,\frac{d\,(\Delta t)}{dx} - \varepsilon \,.\, (1+\nu) \,.\, \beta \,.\, x \,.\, \Delta t = 0$$

Para podermos integrar esta equação, admitamos — como faz Stodola — que o aumento de temperatura Δt segue uma lei da forma

$$\Delta t = A \,.\, x^n$$

Será então

$$\frac{d\,(\Delta t)}{dx} = A\,n\,x^{n-1}$$

A equação fundamental apresentará a nova forma

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\beta \,.\, x + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\beta \,.\, \nu - \frac{1}{x^2}\right)\xi - \varepsilon \,.\, (1+\nu)\,A\,n\,x^{n-1} - \varepsilon \,.\, (1+\nu) \,.\, \beta \,.\, A\,x^{n+1} = 0$$

Stodola, no seu livro «Dampf-und Gas--Turbinen», não integra esta equação para

o caso dum disco de igual resistência. Vamos tentar fazê-lo nalguns casos particulares.

Se $n = 0$, vem $\Delta t = A$, o que equivale a supor que o aquecimento do disco se faz por igual em todos os seus pontos. Nesta hipótese teremos

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\beta . x + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\beta . \nu - \frac{1}{x^2}\right)\xi - \\ - \varepsilon . (1 + \nu) . \beta . A\ x = 0$$

Verifica-se fàcilmente que esta equação admite um integral particular da forma $\xi = C_1 . x$. Com efeito,

$$\frac{d\xi}{dx} = C_1 \quad e \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

Logo,

$$\left(\beta . x + \frac{1}{x}\right) C_1 + \left(\beta . \nu - \frac{1}{x^2}\right) C_1\ x - \\ - \varepsilon . (1 + \nu) . \beta . A\ x = 0$$

o que é verdadeiro para

$$C_1 = \frac{(1 + \nu) . \varepsilon . A}{(1 + \nu)} = \varepsilon . A$$

O integral particular é, portanto,

$$\xi = \varepsilon . A\ x .$$

Então

$$\frac{\xi}{x} = \frac{d\xi}{dx} = \varepsilon . A = \varepsilon . \Delta t$$

As equações (1) mostram-nos que, neste caso,

$$\sigma_r = \sigma_t = 0$$

o que era de esperar.

Para $n = 1$, vem $\Delta t = A\ x$, isto é, o aumento de temperatura é proporcional a x. Nesta hipótese, a equação fundamental não é tão fácil de integrar.

Mostra a experiência, porém, que a variação de Δt com x não é linear, e assim vamos considerar o caso de $n = 2$ — variação parabólica — que mais se aproxima da realidade e, além disso, permite uma integração mais fácil.

Assim, para $n = 2$, virá $\Delta t = A\ x^2$ e

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\beta . x + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\beta . \nu - \frac{1}{x^2}\right)\xi - \\ - 2 . \varepsilon . (1 + \nu) A\ x - \varepsilon . (1 + \nu) . \beta . A\ x^3 = 0$$

A equação admite agora um integral particular da forma

$$\xi = C_1\ x^3 + C_2\ x$$

pois,

$$\frac{d\xi}{dx} = 3\ C_1\ x^2 + C_2 \quad e \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 6\ C_1\ x$$

donde vem

$$6\ C_1\ x + (\beta . x + 1/x) . (3\ C_1\ x^2 + C_2) + (\beta . \nu - \\ - 1/x^2) . (C_1\ x^3 + C_2\ x) - 2 . \varepsilon . (1 + \nu)\ A\ x - \\ - \varepsilon . (1 + \nu) . \beta . A\ x^3 = 0$$

e,

$$[3\ C_1\ \beta + C_1 . \beta . \nu - \varepsilon . (1 + \nu) . \beta . A]\ x^3 + \\ + [8\ C_1 + C_2\ \beta + C_2 . \beta . \nu - 2 . \varepsilon . (1 + \nu) A]\ x = 0$$

Daqui

$$\begin{cases} C_1\ (3 + \nu) - \varepsilon . (1 + \nu)\ A = 0 \\ 8\ C_1 + C_2 . \beta . (1 + \nu) - 2 . \varepsilon . (1 + \nu)\ A = 0 \end{cases}$$

A primeira equação dá-nos

$$C_1 = \frac{(1 + \nu) . \varepsilon A}{3 + \nu}$$

e a segunda

$$C_2 = \frac{2 . \varepsilon . A}{\beta} = \frac{8\ C_1}{\beta\ (1 + \nu)} = \frac{2 . \varepsilon . A\ (\nu - 1)}{\beta\ (3 + \nu)}$$

O integral particular é, por consequência,

$$\xi = \frac{(1 + \nu) . \varepsilon . A}{3 + \nu}\ x^3 + \frac{2\ (\nu - 1) . \varepsilon . A}{\beta\ (3 + \nu)}\ x$$

É interessante notar que, por este processo, podemos achar sempre um integral particular da equação fundamental para valores pares de n, mas não podemos fazê-lo para valores ímpares.

Precisamos agora de recorrer a dados experimentais para estabelecer a lei aproximada de variação de Δt. Stodola refere-se a experiências feitas com um disco de igual resistência, sob a acção de gases a 500° C. O diâmetro médio das pás era de 1.320 mm e o número de rotações igual a 3.000 por minuto. Pràticamente, é o caso do nosso disco do 5.° andar, de onde os gases saiem a 516° C. O diâmetro médio — 925 mm — é que é mais pequeno, o que no entanto não deve alterar muito os resultados.

Diz Stodola que se verificou uma temperatura pràticamente constante de 100° C até uma distância do eixo igual a 0,6 R_m (R_m — raio médio das pás), seguida de um aumento para cerca de 300° C na periferia do disco.

Em virtude do que ficou estabelecido anteriormente, podemos referir o aumento Δt à temperatura do centro do disco — a mais baixa — visto que o aquecimento uniforme de 100° C não origina fadigas (caso de $n = 0$).

O diâmetro do disco na periferia é, no nosso caso, de 80 cm, e então

$$A = \left(\frac{\Delta t}{x^2}\right)_{x=40} = \frac{300 - 100}{1.600} = 0{,}125$$

Quer dizer,

$$\Delta t = 0{,}125\, x^2$$

de acordo com a hipótese da variação parabólica de Δt, que não se afasta muito da experiência referida por Stodola.

O coeficiente médio de dilatação linear do material do disco, entre 20° C e 300° C, é de $11{,}3 \times 10^{-6}/°$ C.

Por outro lado, é

$$\beta = -2\alpha = -\mu \,.\, \omega^2/\sigma = -$$

$$= -2 \times 1{,}115 \times 10^{-3} = -2{,}23 \times 10^{-3}$$

A expressão de ξ será, por conseguinte,

$$\xi = \frac{1{,}3 \times 11{,}3 \times 10^{-6} \times 0{,}125}{3{,}3}\, x^3 +$$

$$+ \frac{1{,}4 \times 11{,}3 \times 10^{-6} \times 0{,}125}{2{,}23 \times 10^{-3} \times 3{,}3}\, x =$$

$$= 0{,}557 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^3 + 269 \,.\, 10^{-6} \,.\, x$$

Também,

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{x} = 0{,}557.10^{-6} \,.\, x^2 + 269.10^{-6} \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dx} = 1{,}671.10^{-6} \,.\, x^2 + 269.10^{-6} \end{cases}$$

$$\varepsilon \,.\, \Delta t = 11{,}3 \,.\, 10^{-6} \,.\, 0{,}125 \,.\, x^2 = 1{,}412 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^2$$

Temos ainda

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{x} - \varepsilon \,.\, \Delta t = 269 \,.\, 10^{-6} - 0{,}855 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^2 \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dx} - \varepsilon \,.\, \Delta t = 269 \,.\, 10^{-6} + 0{,}259 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^2 \end{cases}$$

Substituindo nas equações (1), obtemos

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2}\,(349{,}7 \,.\, 10^{-6} + 0{,}0025 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^2)$$

e ainda

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2}\,(349{,}7 \,.\, 10^{-6} - 0{,}777 \,.\, 10^{-6} \,.\, x^2)$$

Para E podemos tomar $1{,}86 \times 10^6$ kg/cm², valor do módulo de elasticidade do material a 400° C, o que dá

$$\frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{1{,}86}{0{,}91}\, 10^6 \cong 2{,}05 \,.\, 10^6$$

Logo,

$$\begin{cases} \sigma_r = 720 + 0{,}0052 \,.\, x^2 \\ \sigma_t = 720 - 1{,}5900 \,.\, x^2 \end{cases}$$

Estes resultados só são válidos dentro das hipóteses feitas e, portanto, aproximados. Além disso, o facto de só termos conseguido determinar um integral particular da equação fundamental e não o integral

geral, com constantes arbitrárias, não nos permite introduzir aqui a condição de $\sigma_r = 0$ no contorno exterior da coroa do disco.

Apesar de tudo isto, aquelas expressões estão notàvelmente de acordo com os resultados experimentais referidos por Stodola. Elas põem em evidência os dois importantes factos:

1.º) A fadiga radial conserva-se pràticamente constante desde o centro do disco até à coroa, com um valor à volta de *750 kg/cm²*. Tem, contudo, tendência para aumentar ligeiramente.

Na experiência descrita por Stodola, aquela fadiga aumentava de 700 a 1.050 kg/cm², desde o centro até à coroa, diminuindo aqui repentinamente para zero.

2.º) A fadiga tangencial tem valor igual à radial no centro do disco e depois vai diminuindo para a coroa, primeiro de um modo ligeiro e depois ràpidamente, transformando-se em compressão na coroa, com o valor de

$$\sigma_t = 720 - 1{,}59 \times 1.600 \cong -\ 1.800\ kg/cm^2$$

Stodola mostra que na experiência feita a fadiga tangencial era sempre menor que a radial, embora se mantivesse quase constante até perto da coroa, e aqui diminuia duma maneira rápida, transformando-se numa compressão de 2.800 kg/cm² na periferia (Note-se que o disco a que se refere Stodola tinha um diâmetro maior do que o nosso).

Como se verifica, o estudo feito conduz a resultados que estão muito próximos da realidade. É de registar apenas a insuficiência do integral particular encontrado para atender à existência duma coroa a distância finita, onde necessàriamente e de uma maneira quase brusca se torna $\sigma_r = 0$.

Concluímos ainda do estudo feito que as fadigas térmicas são proporcionais às diferenças de temperaturas e ao coeficiente de dilatação do material. Por isso, numa turbina de gás devem evitar-se as grandes espessuras que provocam variações apreciáveis de temperatura, as quais podem produzir deformações plásticas e ocasionar distorsões ou mesmo fracturas. A turbina de gás é um daqueles exemplos em que o peso e o volume não são necessàriamente índices de segurança.

c) *Fadigas totais* — Afirmámos que as fadigas térmicas podiam calcular-se supondo o disco parado, sendo as fadigas totais a soma daquelas com as provocadas depois pela força centrífuga, uma vez que o disco se puzesse em movimento.

A razão de ser daquela afirmação reside no facto de tanto a equação fundamental relativa às deformações térmicas, como aquela que diz respeito às deformações originadas pela força centrífuga, serem lineares em ξ e nas suas derivadas. Recìprocamente, as fadigas resultantes da força centrífuga podem determinar-se, como o fizemos, supondo que o disco está todo à mesma temperatura. É claro que, nestas circunstâncias, as duas equações podiam combinar-se numa só, de modo a esta nos fornecer imediatamente as deformações totais, e por conseguinte as fadigas totais por intermédio de equações semelhantes às (1).

Sendo pràticamente constantes as fadigas térmicas no corpo do disco, deriva daí que as fadigas totais, quer radiais quer tangenciais, vão ser

$$\sigma_T = \sigma' + \sigma'' \cong 350 + 750 \cong 1.100\ kg/cm^2$$

No exemplo de Stodola, as fadigas totais crescem desde 2.200 kg/cm², no centro do disco, até 2.500 kg/cm², junto à coroa Neste caso, porém, a fadiga proveniente da força centrífuga era de uns 1.500 kg/cm², em vez dos nossos de 350 kg/cm².

Observemos que no nosso caso as fadigas totais na região central do disco devem ser inferiores aos 1.100 kg/cm², pois aquele constitui uma peça só com o veio e este apresenta naquela região um diâmetro de 35 cm.

Quanto à coroa, a fadiga radial anula-se na sua periferia, ao passo que a fadiga tangencial resulta de uma compressão de 1.800 kg/cm², de origem térmica, e de duas trac-

ções: uma de 350 kg/cm² das forças centrífugas que actuam sobre o disco e outra de uns 150 kg/cm², da força centrífuga sobre as pás. A fadiga tangencial resultante é então

$$\sigma_T = -1.800 + 500 = -1.300 \ kg/cm^2$$

No exemplo apontado por Stodola, a compressão final na periferia da coroa era de 1.850 kg/cm².

Na realidade, a nossa fadiga não deve atingir valores tão elevados, pois o perfil de igual resistência — a que corresponde a fadiga de 1.300 kg/cm² — é modificado na coroa, aumentando as secções resistentes.

* * *

Ressalta do estudo feito que, em instalações fixas, onde é fundamental uma longa vida para as máquinas, as fadigas térmicas são as mais importantes. Por isso, convém diminuir o mais possível as fadigas devidas à força centrífuga, para não ficarem exageradas as fadigas totais.

Concluimos também que é preciso muito cuidado ao parar a turbina, pois o desaparecimento brusco da força centrífuga, ou seja, da tracção resultante na periferia, originará um aumento correspondente da compressão na coroa. A paragem deve ser feita com lentidão, para dar tempo a que o arrefecimento mais rápido da coroa vá transformando aquela compressão elevada em tracção. Com efeito, como a coroa vai arrefecer mais depressa que o disco, ela sujeitará o disco a uma compressão e este, como reacção, irá submeter a coroa a uma tracção.

d) *Determinação da velocidade crítica do rótor* — Nas turbinas de vapor e de gás, o veio não se calcula como nas máquinas lentas. Para aquelas, o cálculo do veio assenta fundamentalmente na determinação da velocidade crítica, passando para segundo plano a consideração das fadigas a que vai trabalhar.

Interessa-nos apenas estabelecer a velocidade crítica de 1.ª ordem, visto a turbina rodar a 3.000 rot/min.

Seguimos para isso o processo de G. Kull, descrito por Dubbel no seu «Manual del Constructor de Máquinas», 1.º volume, e também em «Motores de Combustión Interna», do Dr. Hans List, volume VIII, 2.ª parte («Dinámica de los Motores de Combustión Interna»).

De acordo com Kull, a velocidade crítica de 1.ª ordem dum veio carregado com vários discos e de diâmetro variável é dada por

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{f^x}}$$

onde

$$f^x = \frac{P_1 \cdot f_1^2 + P_2 \cdot f_2^2 + \dots}{P_1 \cdot f_1 + P_2 \cdot f_2 + \dots}$$

representando f_1, f_2, ..., as flechas estáticas nas linhas de acção das cargas P_1, P_2, ..., quando estas actuam simultâneamente.

Tanto Dubbel como H. List não apresentam a justificação de G. Kull, mas esta deve ser, nas suas linhas gerais, a seguinte. Se tivermos um veio com várias cargas concentradas, a velocidade crítica do conjunto pode ser obtida pela fórmula empírica de Dunkerley:

$$\frac{1}{\omega^2_c} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega^2_2} + \dots$$

onde ω é a velocidade angular crítica do veio sem cargas, ω_1 a do veio suposto sem peso e carregado apenas com a carga P_1, etc. Em regra, supõe-se que o peso do veio está repartido pelas cargas concentradas, de modo que o primeiro termo do 2.º membro torna-se nulo. Mas a velocidade crítica dum veio sem peso, com a carga concentrada P_1, é igual a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cdot k}{P_1}} = \sqrt{\frac{g}{f'_1}}$$

em que k é a força necessária para produzir uma flexa unitária e f'_1, portanto, é a flecha devida à carga P_1, em repouso.

Para várias cargas concentradas P_1, P_2, ..., vem então

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{f'_1}{g} + \frac{f'_2}{g} + \ldots = \frac{\Sigma f'}{g}$$

e daqui

$$\sqrt{\frac{g}{\Sigma f'}} = \sqrt{\frac{g}{f'_1 + f'_2 + \ldots}}\ \omega_c$$

Kull faz a hipótese simplificadora de que a flecha estática f_1 na linha de acção de P_1, devida ao conjunto das cargas, se pode escrever

$$f_1 = f'_1 \left(1 + \frac{f_2 \cdot P_2}{f_1 \cdot P_1} + \frac{f_3 \cdot P_3}{f_1 \cdot P_1} + \ldots\right)$$

donde se tira

$$f'_1 = \frac{f_1^2 \cdot P_1}{f_1 \cdot P_1 + f_2 \cdot P_2 + \ldots}$$

Por conseguinte,

$$f'_1 + f'_2 + \ldots = \frac{f_1^2 \cdot P_1 + f_2^2 \cdot P_2 + \ldots}{f_1 \cdot P_1 + f_2 \cdot P_2 + \ldots} = f^x$$

A determinação das flechas estáticas f_1, f_2, ..., está feita na Fig. 4. Para isso, dividimos o veio em 15 partes, repartindo 5 delas pelos discos e substituindo as outras 10 por cargas concentradas, em harmonia com a variação de diâmetros.

Os diâmetros com os quais foi feito o esboço do veio, depois de várias tentativas, e as cargas respectivas estão indicados a seguir:

Pontos de aplicação	1 e 15	2 e 14	3 e 13	4 e 12	5 e 11	6 a 10
Diâmetros (cm)	20	23	26	29	31	35
Cargas (kg) ...	25	30	65	80	95	460

De acordo com o que dissemos, cada uma das cargas P_6 a P_{10} compreende o peso dum disco e o peso da parte do veio por ele repartido.

Traçado o polígono funicular das cargas, obtivemos para reacções nos apoios A e B, de diâmetros $d_A = 13$ cm e $d_B = 14$ cm, os valores

$$R_A = 1.420 \text{ kg}$$

$$R_B = 1.470 \text{ kg}$$

O momento flector máximo verifica-se na secção referente à carga P_8, e é igual a

$$M_{f_{máx}} = \overline{OH} \times 100 \times \overline{CD} \times 5 = 15 \times 100 \times$$
$$\times 17 \times 5 = 127.500 \text{ kg . cm}$$

onde $\overline{OH}$ é a distância polar, em cm, e $\overline{CD}$ a ordenada máxima do polígono funicular, estando a primeira multiplicada pela escala das forças e a segunda pela dos comprimentos.

Para traçarmos a superfície dos momentos reduzidos, dividimos o momento flector máximo pelos momentos de inércia das diferentes secções, e obtivemos

Pontos de aplicação	Momentos de inércia (cm^4)	M/I (kg/cm^3)
A	1.402	91
1 e 15	7.854	16,3
2 e 14	13.737	9,3
3 e 13	22.432	5,7
4 e 12	34.719	3,7
5 e 11	45.333	2,8
6 a 10	73.662	1,7
B	1.886	67,7

Os cocientes M/I foram tomados como ordenadas no ponto de aplicação da carga P_8, correspondente ao momento flector máximo, e assim foi desenhada a superfície dos momentos reduzidos.

Esta superfície de momentos foi tomada para superfície de carga dum veio ideal A′ B′ de acordo com o teorema de Mohr. Para isso, essa superfície foi dividida em dois triângulos extremos e trapézios. As áreas destas superfícies parciais foram tomadas como forças aplicadas nos respectivos centros de gravidade.

Obtivemos 14 forças simbólicas, de valores:

$$F_1 = 3{,}2 \times 5 \times 12{,}55 \times 1/2 = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_2 = 1{,}7 \times 5 \times (2{,}2 + 3{,}35)/2 = 24 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_3 = F_{12} = 1{,}6 \times 5 \times (1{,}9 + 2{,}5)/2 = 18 \text{ kg/cm}^2$$

$F_4 = F_{11} = 3{,}0 \times 5 \times (1{,}6 + 2{,}3)/2 = 30\ kg/cm^2$
$F_5 = F_{10} = 3{,}0 \times 5 \times (1{,}5 + 1{,}95)/2 = 26$ »
$F_6 = F_9 = 3{,}0 \times 5 \times (1{,}5 + 1{,}8)/2 = 25$ »
$F_7 = F_8 = 8{,}5 \times 5 \times (1{,}1 + 1{,}7)/2 = 60$ »
$F_{13} = 1{,}9 \times 5 \times (1{,}4 + 2{,}75)/2 = 20\ kg/cm^2$
$F_{14} = 2{,}0 \times 5 \times 5{,}85/2 = 30\ kg/cm^2$

Os lados do novo polígono funicular cortam as linhas correspondentes às mudanças de secção em pontos da linha elástica, o que nos permitiu traçar esta última.

Como ensina o teorema de Mohr, a flecha num ponto qualquer é dada por

$$f = \frac{\overline{O'H'} \times 20}{E} \cdot y \times 5 = \frac{15 \times 20 \times 5}{1.860.000} \cdot y =$$
$$= 0{,}81 \times 10^{-3} \cdot y\ cm$$

onde $\overline{O'H'}$ é a nova distância polar, y a ordenada da curva funicular e E o módulo de elasticidade do material. Por precaução, tomámos o valor de E relativo a 400° C, embora a temperatura do veio fique muito àquem. $\overline{O'H'}$ foi multiplicada pela escala das forças simbólicas e y pela dos comprimentos.

As flechas nas linhas de acção das forças, assim como os produtos f. P e f^2. P estão indicados abaixo:

Pontos de aplicação	(P kg)	f (cm)	f^2
1	25	$3{,}05.0{,}81.10^{-3} = 2{,}47 \times 10^{-3}$	$6{,}1 \times 10^{-6}$
2	30	3,85. » $= 3{,}12 \times$ »	$9{,}75 \times$ »
3	65	4,80. » $= 3{,}89 \times$ »	$15{,}1 \times$ »
4	80	5,85. » $= 4{,}74 \times$ »	$22{,}5 \times$ »
5	95	6,60. » $= 5{,}35 \times$ »	$28{,}6 \times$ »
6	460	7,20. » $= 5{,}83 \times$ »	$34{,}0 \times$ »
7	460	7,60. » $= 6{,}16 \times$ »	$38{,}0 \times$ »
8	460	7,60. » $= 6{,}16 \times$ »	$38{,}0 \times$ »
9	460	7,50. » $= 6{,}08 \times$ »	$37{,}0 \times$ »
10	460	6,90. » $= 5{,}59 \times$ »	$31{,}3 \times$ »
11	95	6,15. » $= 4{,}98 \times$ »	$24{,}8 \times$ »
12	80	5,25. » $= 4{,}26 \times$ »	$18{,}2 \times$ »
13	65	4,00. » $= 3{,}24 \times$ »	$10{,}5 \times$ »
14	30	2,90. » $= 2{,}35 \times$ »	$5{,}52 \times$ »
15	25	1,90. » $= 1{,}54 \times$ »	$2{,}37 \times$ »

Temos ainda:

Pontos de aplicação	$f \cdot P \times 10^3$	$f^2 \cdot P \times 10^6$
1	61,7	152,5
2	93,6	293,0
3	253,0	982,0
4	379,0	1.800,0
5	508,0	2.720,0
6	2.690,0	15.650,0
7	2.830,0	17.500,0
8	2.830,0	17.500,0
9	2.790,0	17.050,0
10	2.570,0	14.400,0
11	474,0	2.360,0
12	341,0	1.455,0
13	211,0	683,0
14	70,6	165,5
15	38,5	59,3
	16.140,4	92.770,3

Daqui tiramos,

$$f^x = \frac{\Sigma f^2 \cdot P}{\Sigma f \cdot P} = \frac{92.770{,}3 \times 10^{-6}}{16.140{,}4 \times 10^{-3}} =$$
$$= 5{,}75 \times 10^{-3}\ cm$$

e, por consequência,

$$\omega_c = \sqrt{\frac{980}{0{,}00575}} = 413\ rad/seg^2$$

O número de rotações crítico é, finalmente,

$$N_c = \frac{30 \times 413}{\pi} = 3.950 \cong 4.000\ rot/min$$

Este resultado condiz com a prática corrente, e a afirmação da casa «Oerlikon», de a velocidade crítica do veio estar aproximadamente 30 % acima do número normal de rotações (3.000 rot/min).

Concluimos que o veio da turbina da alta trabalha em boas condições, e é um veio rígido visto o seu número de rotações ser inferior à velocidade crítica de 1.ª ordem.

A casa «Oerlikon», a princípio, utilizava na turbina da baixa um veio flexível, isto é, rodando a 4.500 rot/min, superior à velocidade crítica de 1.ª ordem. Porém, em resultado de experiências feitas acabou por se decidir pela construção de veios rígidos.

A tangente à linha elástica do rótor, paralela à linha de fecho do segundo polígono funicular da Fig. 4, determina a flecha máxima.

Esta é igual a

$$f_{máx} = \frac{\overline{O'H'} \,.\, 20}{E} \,.\, \overline{MN} \,.\, 5 = \frac{15 \times 20 \times 7{,}65 \times 5}{1.860.000} =$$
$$= 0{,}0062 \text{ cm} \cong \mathit{0{,}06\ m/m}$$

Este valor é inteiramente de aceitar, pois não põe em perigo as folgas dos labirintos e as folgas entre as pás móveis e as fixas.

e) *Fadigas no veio* — Estabelecidas as dimensões do veio com a preocupação fundamental de elevar suficientemente a sua velocidade crítica, façamos uma verificação das suas fadigas.

O veio tem de transmitir uma potência de $N = 1.510$ CV a $n = 3.000$ rot/min. Por ser N/n menor que a unidade, o seu diâmetro mínimo vem

$$d_{mín} = 120 \,.\, \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120 \,.\, \sqrt[4]{\frac{1.510}{3.000}} \cong 10 \text{ cm}$$

Nós tomámos um diâmetro mínimo de 13 cm, no apoio A, atendendo à velocidade crítica, pelo que o veio trabalha em boas condições no que respeita à torsão.

No entanto, a fórmula utilizada pressupõe um módulo de elasticidade transversal $G = 800.000$ kg/cm². No nosso caso, se tomarmos por precaução, $E = 1.860.000$ kg/cm², vem

$$G \cong 0{,}385\, E \cong 0{,}385 \times 1.860.000 \cong 715.000 \text{ kg/cm}^2$$

A deformação elástica, em rad/cm, é dada por

$$\theta = \frac{32 \,.\, M_r}{\pi\, d^4 \,.\, G} \text{ rad/cm}$$

onde

$$M_r = 71.620 \times N/n = 71.620 \times$$
$$\times\ 1.510/3.000 \cong 36.000 \text{ kg/cm}$$

Para $d_A = 13$ cm,

$$\theta = \frac{32 \times 36.000}{\pi \times 13^4 \times 715.000} \cong 0{,}179 \times$$
$$\times\ 10^{-4} \text{ rad/cm} \cong 0{,}1 \,.\, 10^{-2}\ ^{\circ}\text{/cm}$$

Esta deformação equivale a 1/10 de grau por metro linear, pelo que está longe do máximo de 1/4 de grau que em regra se consente na prática. Além disso, a hipótese feita é extremamente desfavorável, por o veio possuir o diâmetro de 13 cm numa região muito pequena.

A fadiga de torsão no diâmetro mínimo tem o valor

$$\sigma_r = \frac{16 \,.\, M_r}{\pi \,.\, d^3_A} = \frac{16 \times 36.000}{\pi \times 13^3} \cong \mathit{85 kg/cm}$$

Quanto à flexão, vamos verificar que o veio projectado é aproximadamente um sólido de igual resistência.

Sabemos que os momentos flectores nas diferentes secções do veio são proporcionais às ordenadas do primeiro polígono funicular da Fig. 4. Por outro lado, para manter constante a fadiga de flexão, a relação entre os momentos flectores deve ser igual à relação entre os cubos dos respectivos diâmetros.

Tomando como referência o apoio A, de diâmetro $d_A = 13$ cm, e a ordenada do funicular na extremidade do moente — 13 mm —, os diâmetros dos diferentes troços para um veio de igual resistência à flexão seriam:

$$d_8 = 13 \,.\, \sqrt[3]{170/13} = 31 \text{ cm} \ldots\ldots (35 \text{ cm})$$

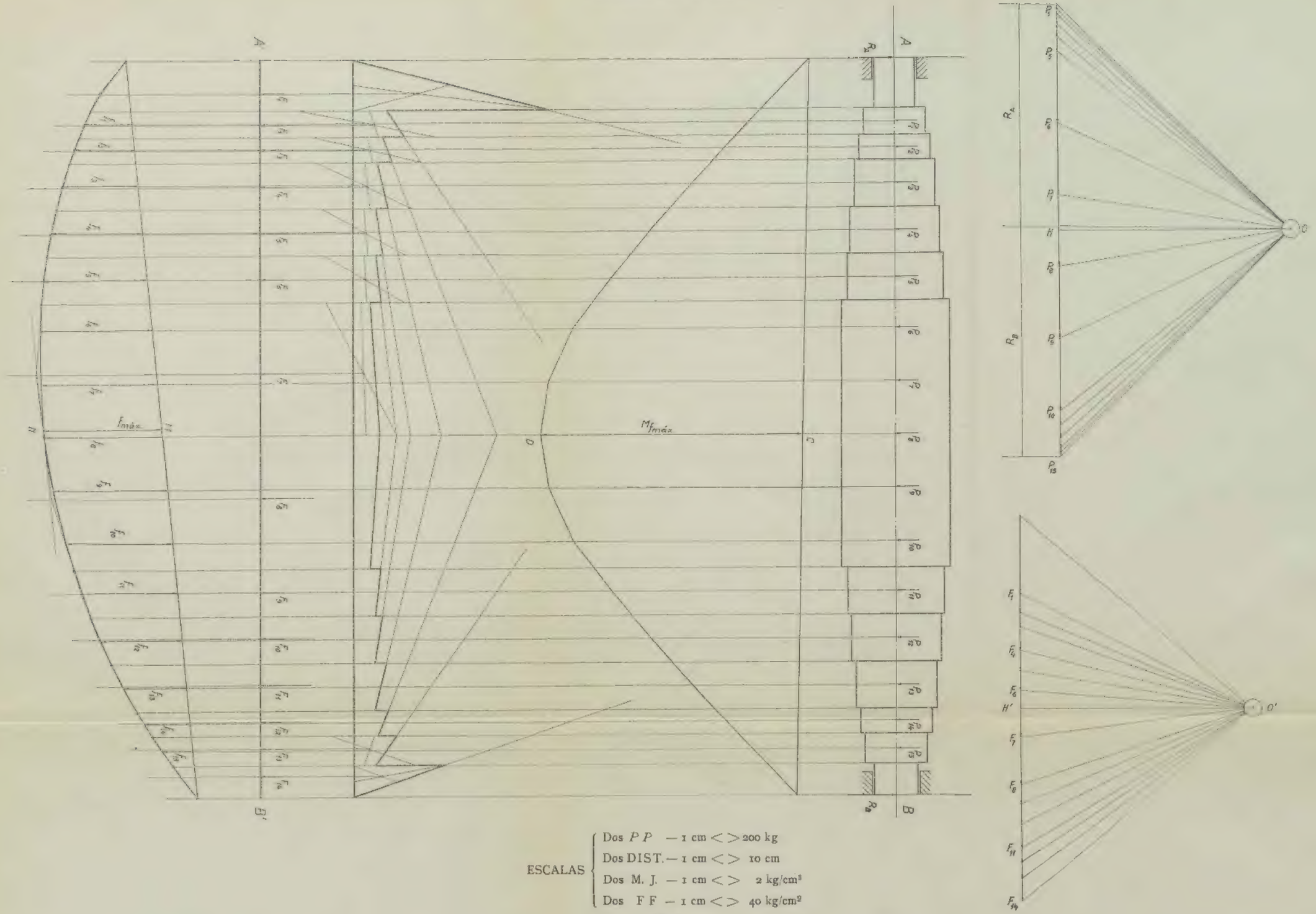
$$d_5 = 13 \,.\, \sqrt[3]{138/13} = 29 \text{ cm} \ldots\ldots (31 \text{ cm})$$

$$d_4 = 13 \,.\, \sqrt[3]{114/13} = 27 \text{ cm} \ldots\ldots (29 \text{ cm})$$

$$d_3 = 13 \,.\, \sqrt[3]{89/13} = 25 \text{ cm} \ldots\ldots (26 \text{ cm})$$

DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE CRÍTICA DO RÓTOR

PROCESSO DE G. KULL



ESCALAS
- Dos $P\,P$ — 1 cm <> 200 kg
- Dos DIST. — 1 cm <> 10 cm
- Dos M. J. — 1 cm <> 2 kg/cm²
- Dos F F — 1 cm <> 40 kg/cm²

Fig. 4

$$d_2 = 13 \cdot \sqrt[3]{62/13} = 22 \text{ cm} \ldots\ldots (23 \text{ cm})$$

$$d_1 = 13 \cdot \sqrt[3]{47/13} = 20 \text{ cm} \ldots\ldots (20 \text{ cm})$$

Entre parêntesis estão indicados os diâmetros realmente adoptados.

De modo análogo, tomando como referência o apoio B, de diâmetro $d_B = 14$ cm, e a ordenada do funicular na extremidade do moente — 15 mm —, vem

$$d_8 = 14 \cdot \sqrt[3]{170/15} = 32 \text{ cm} \ldots\ldots (35 \text{ cm})$$

$$d_{11} = 14 \cdot \sqrt[3]{134/15} = 29 \text{ cm} \ldots\ldots (31 \text{ cm})$$

$$d_{12} = 14 \cdot \sqrt[3]{109/15} = 27 \text{ cm} \ldots\ldots (29 \text{ cm})$$

$$d_{13} = 14 \cdot \sqrt[3]{82/15} = 25 \text{ cm} \ldots\ldots (26 \text{ cm})$$

$$d_{14} = 14 \cdot \sqrt[3]{55/15} = 22 \text{ cm} \ldots\ldots (23 \text{ cm})$$

$$d_{15} = 14 \cdot \sqrt[3]{39/15} = 19 \text{ cm} \ldots\ldots (20 \text{ cm})$$

O diâmetro no apoio B está também relacionado com o do apoio A por

$$d_B \cong d_A \cdot \sqrt[3]{15/13}\ 13{,}7 \cong 14 \text{ cm}$$

Quer dizer, o veio aproxima-se muito dum sólido de igual resistência à flexão. As pequenas divergências apresentadas são devidas à necessidade de afastar a velocidade crítica do número normal de rotações.

No apoio A, temos

$$M_{f_A} = 15 \times 100 \times 5 \times 1{,}3 \cong 10.000 \text{ kg . cm}$$

Então,

$$M_i = 0{,}6\,(M_{f_A} + M_r) = 0{,}6\,(10.000 + 36.000) = 27.600 \text{ kg . cm}$$

e assim

$$\sigma_i = \frac{M_i}{(I/V)_A} = \frac{27.600}{215{,}7} \cong 130 \text{ kg/cm}^2$$

No apoio B, é, sucessivamente,

$$M_{f_B} = 15 \times 100 \times 5 \times 1{,}5 \cong 11.500 \text{ kg . cm}$$

$$M_i = 0{,}6\,(M_{f_B} + M_r) = 0{,}6\,(11.500 + 36.000) = 28.500 \text{ kg . cm}$$

$$\sigma_i = \frac{M_i}{(I/V)_B} = \frac{28.500}{269{,}4} \cong 105 \text{ kg/cm}^2$$

No ponto de aplicação da carga P_8, onde é máximo o momento flector, vem (por ser agora M_f maior do que M_r):

$$M_i = M_{f_{máx}} + 0{,}2\,M_r = 127.500 + 0{,}2 \times 36.000 = 134.700 \text{ kg . cm}$$

Sabemos que $d_8 = 35$ cm e, por conseguinte,

$$\sigma_i = \frac{M_i}{(I/V)_8} = \frac{134.700}{4.209} \cong 35 \text{ kg/cm}^2$$

Confirma-se assim a afirmação feita de que em turbinas de vapor e de gás estas fadigas são, em geral, muito baixas e interessa acima de tudo a determinação da velocidade crítica.

Com a colaboração da Sociedade Portuguesa do Ar Líquido, realizou-se durante o período de Férias de Páscoa mais um Curso de Soldadura organizado pela Secção Pedagógica da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico.

VIDA ESCOLAR E ASSOCIATIVA

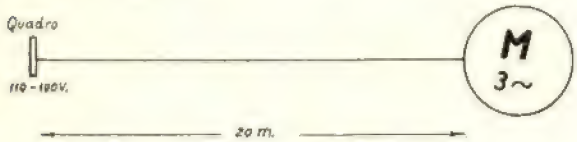
PONTOS DE EXAME

Electrotecnia Geral

Exame final de Outubro de 1952

PONTO N.º 1

Pretendemos instalar um motor trifásico M, com as características indicadas, num local distanciado de 20 m do quadro, onde se dispõe de uma tensão trifásica de 110/190 V.



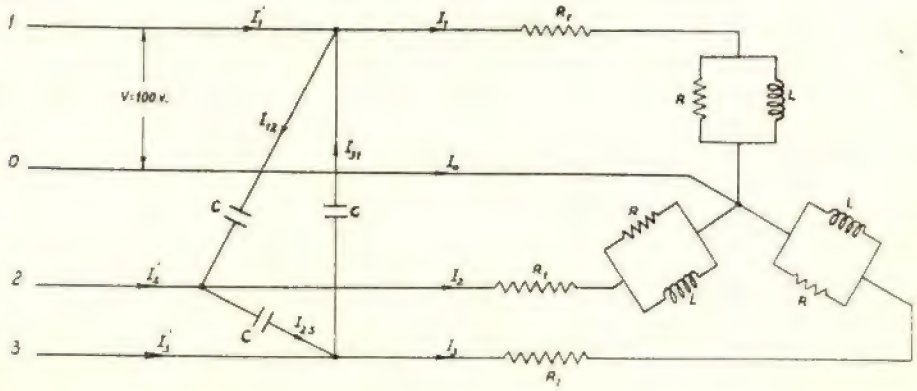
$P = 25$ HP
$V = 190$ V.
$\cos \gamma = 0{,}8$
$\eta = 0{,}75$

Pede-se:

1 — Qual a secção dos condutores a empregar nas linhas de alimentação do motor.
2 — Que protecções emprega, qual o seu calibre e onde as instala.
3 — Supondo que a instalação é feita numa oficina, que tipo de condutores emprega e como os instala.

PONTO N.º 2

Um circuito constituído como se indica no esquema abaixo, é alimentado por uma tensão trifásica simétrica,



cuja tensão simples é de 100 V. e cuja frequência é de 50 Hz.

Dados:

$R_1 = 5$ ohm $R = 10$ ohm $L = 20$ mH $C = 200$ Fμ

Pede-se:

1 — Os valores de I_1 I_2 I_3 e I_0.
2 — A potência absorvida pelo circuito.
3 — Os valores de I'_1 I'_2 e I'_3.

PONTO N.º 3

1 — Desenhe os esquemas de ligações de um motor de excitação composta adicional, incluindo as resistências de arranque e de campo, e de um motor assíncrono trifásico de rotor de dupla gaiola com arrancador estrela triângulo.

2 — Supondo que o rotor do motor assíncrono tem uma resistência muito pequena e que o motor de excitação composta tem uma f. m. m. do enrolamento série relativamente elevada em face da f. m. m. do enrolamento em derivação, compare estes dois motores sob os seguintes aspectos:

a) arranque — binário de arranque e sobre-intensidade de arranque;
b) velocidade — sua variação com a carga e possibilidades de a regular;
c) variação do binário com a intensidade pedida à rede.

3 — Se empregarmos um assíncrono com um rotor de maior resistência, que influência teria esse facto sobre o que foi dito no § anterior.

4 — Se diminuirmos a relação entre as f. m. m. dos enrolamentos série e derivação no motor de extinção composta, que influência teria esse facto sobre o que foi dito no n.º 2.

1.º Exame de Matemáticas Gerais

(Ordinário) — 13-3-953

I — PARTE PRÁTICA

1) Determinar a equação binómia de coeficientes reais e grau mínimo que admite como raízes os dois números:

$$z_1 = \cos 5\pi/13 + i \,.\, \text{sen}\, 5\pi/13$$
$$z_2 = \cos 7\pi/9 - i \,.\, \text{sen}\, 7\pi/9.$$

z_1 e z_2 raízes primitivas? Justificar.

2) Calcular a e b de modo que os três planos de equações:

$$x - y + 3z = b$$
$$7x + ay + z = 8$$
$$-5x + ay + 2z = 0$$

pertençam ao mesmo feixe.

3) Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ b^n}{(b + a_1) \,.\, (2b + a_2) \ldots (nb + a_n)}$$

sabendo que a sucessão de termo geral a_n tende para $A > 1$, e b é positivo e menor que 1.

4) Dadas as rectas $r_1) \begin{cases} y = 1/2 \,.\, (-x - 3) \\ z = 1/2 \,.\, (5x + 1) \end{cases}$

$$r_2) \begin{cases} 3x + y - z + 6 = 0 \\ -2 + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_3) \left\{ \frac{x-7}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{5} \right.$$

a) provar que são as arestas duma superfície prismática triangular;

b) escrever as equações do lugar dos pontos do espaço que distam igualmente das três rectas.

II — PARTE TEÓRICA

1) Números complexos:

Considere o grupo R dos números inteiros, no qual a operação do grupo é a soma ordinária. Considere o grupo L dos complexos da forma $(\sqrt{2}/2)^n\ (1 + i)^n$, onde n é inteiro, e no qual a operação do grupo é o produto. Dado n, estude a correspondência:

$$n \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (1 + i)^n \,.$$

Diga se se trata dum homomorfismo. No caso afirmativo, diga qual é o invariente π, em R, tal que $L \simeq R/\pi$.

2) Equações lineares:

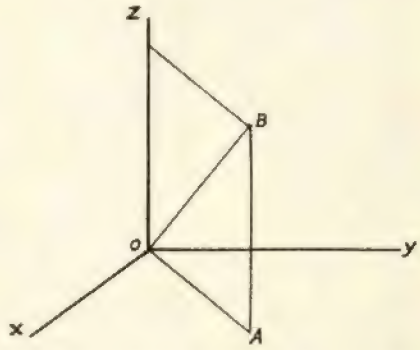
Considere os dois vectores que ligam a origem das coordenadas aos dois pontos $(4, -2, -4)$, $(6, -3, 1)$. Mostre que os dois vectores são linearmente independentes.

3) Limites:

Suponha que a sucessão $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, de números reais, tende para o limite z_0. Mostre que a sucessão dos seus valores absolutos $|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|, \ldots$ tende para o limite $|z_0|$.

4) Geometria Analítica:

Tome o plano OAB cujo traço OA, no plano xy, é a bissectriz do ângulo recto xOy; depois, tome a



bissectriz OB do ângulo recto AOz. Quais são as coordenadas do ponto do infinito da recta OB?

5) Funções:

Demonstre a continuidade, para todo o valor de x, da função sen $(2x + 5)$.

6) Conjuntos de números: Considere um conjunto C de números, limitado inferiormente. O número α, limite inferior preciso de Cauchy (limite principal de C), define-se como o limite inferior dos números η, tais que há uma infinidade de números de C inferiores a η. Demonstre que α também pode definir-se como o limite superior (supremo) dos números ξ, tais que há apenas um número finito de números de C inferiores a ξ.

SEMANA DE MÁQUINAS

Integrada no programa das suas realizações, a **Secção Pedagógica da A. E. I. S. T.** apresenta de 20 a 27 de Abril a Semana de Máquinas, com o seguinte programa:

Dia 20 — Segunda-feira, às 16 h.

Sessão de abertura (No Salão Nobre do Pavilhão Central).

— Abertura pelo Presidente da A. E. I. S. T.

— «Significado da Semana de Máquinas», pelo aluno finalista António Pacheco Luís Gomes.

— «A Formação do Eng.º Mecânico», Conferência pelo Prof. *Dr. Abram Droz.*

— Inauguração das *Exposições de Máquinas e acessórios, material didáctico e bibliográfico* (Na sede da A. E. I. S. T.).

Dia 21 — Terça-feira, às 18,15 h.

— Secção cinematográfica de curta metragem (técnica) (No Pavilhão de Química).

Dia 22 — Quarta-feira, às 21,30 h.

— «Comando Hidráulico de Comportas», conferência pelo Assistente *Eng.º Luciano de Faria.* (No Pavilhão de Química).

Dia 23 — Quinta-feira, às 18,15 h.

— Sessão cinematográfica de curta metragem (técnica). (No Pavilhão de Química).

Dia 25 — Sabado, às 21,30 h.

— «O Engenheiro perante o problema económico industrial português», conferência pelo *Prof. Adrião Sequeira.* (No Pavilhão de Química).

As *Exposições de Máquinas e acessórios, material didáctico e bibliográfico* estão abertas ao público de 20 a 27 de Abril inclusivé das 12 às 14 horas e das 16 às 19 horas.

Tenciona a «Técnica» em colaboração com o Dig.mo Conselho Escolar do Instituto Superior Técnico promover uma série de conferências subordinadas a diversos temas que interessam ao Fomento Nacional.

Muito embora ainda se não possam fixar datas, e alguns dos conferentes não tenham podido indicar decisivamente o seu assentimento e o título da lição, parece-nos útil dar uma ideia dos assuntos versados e respectivos conferentes, e uma ordem de grandeza da data — fins de Abril ou princípios de Maio.

Prof. Dr. Luís Guimarães dos Santos
Matérias-primas Minerais na Metrópole

Eng.º Vasco Taborda Ferreira
Construção Naval

Eng.º Eduardo Rodrigues de Carvalho
Celulose

Dr. Mário Morais
Eng.º Amaro de Campos Melo
Problemas da Indústria Téxtil

Eng.º Paulo de Barros
Problemas de Electrificação

Prof. Eng.º António Herculano de Carvalho
Combustíveis nacionais

Indicaremos oportunamente mais algumas conferências, cuja possibilidade de realização está a ser estudada.

C. D. 532.543

APLICAÇÃO DO GRÁFICO DE LEACH

PELO ENG.º CIVIL (E. E.) BAPTISTA JÚNIOR

1) — A maior parte das vezes a altura duma barragem construída em um curso de água, é condicionada pela existência de pontos importantes que não convém serem atingidos pelas águas represadas na albufeira, ou por obras de aproveitamento que não podem ser prejudicadas no exercício de exploração, como por exemplo, centrais hidroeléctricas, etc.

Os cadernos de encargos relativos à outorga de concessões de carácter público para a captação da energia hidráulica dos rios, marcam como base determinado perímetro para além do qual não se pode fazer sentir no escoamento de caudais o efeito de regolfo provocado pela criação de obstáculos no alvéo.

Dado portanto o ponto a partir do qual deve deixar de ter influência o encoramento das águas, ou indicada a cota que o nível líquido não pode ultrapassar, importa conhecer as regras capazes de levarem à determinação, para os diferentes casos da prática, do nível máximo que a água pode atingir no perfil onde vai ser construída a barragem, para que as condições acima expostas sejam obedecidas.

O caso em si não é mais do que um problema de regolfo em um curso de água natural, que pode ser resolvido através dos métodos usuais.

Não vamos, porém, nesta pequena nota, tratar dos inúmeros processos conhecidos, analíticos ou gráficos, deduzidos sempre a partir de simplificações ou artifícios de cálculo de modo a tornar integrável a fórmula geral do movimento gradualmente variado, para resolver os problemas de regolfo. Referimo-nos apenas ao método geral de que se faz uso nos estudos de regolfo em cursos de água, de carácter irregular, tanto em planta como perfil e secções de vasão, e em cuja aplicação pode ser ou não considerada a variação da energia cinética que sofre a veia líquida no escoamento, conforme se deseja obter maior ou menor grau de precisão nos resultados.

Os cálculos baseiam-se no conhecimento de determinados elementos característicos das secções transversais do rio e do coeficiente de rugosidade das paredes do leito total para efeitos da determinação da perda de carga sofrida no escoamento. Deste modo compreende-se que a divisão do rio a montante do obstáculo em troços a cada um dos quais se aplica o cálculo, é um processo criterioso desde que resultem entreperfis de características mais ou menos uniformes.

Para a aplicação conveniente do método, torna-se necessário proceder ao levantamento rigoroso dos perfis transversais e cuidada dedução das leis S (H) e P (H) para cada, em que S e P, são respectivamente a superfície e perímetro molhados e H altura de água.

Na determinação da curva de regolfo do tipo que nos ocupa, o traçado começa, como se sabe, por jusante, a partir do nível inicial — cota de água sobre a barragem — e que é conhecido. O método aplicado troço a troço dá, para cada perfil considerado, a cota a que se elevará a água respeitante ao escoamento dum determinado caudal Q.

Compreende-se que procedendo como se indica pode resultar ter que fazer-se grande número de tentativas até se acertar com a cota inicial procurada. Dado que a aplicação do método geral das tentativas é muito laboriosa, a solução do problema podia conduzir a perda de tempo apreciável. Obvia-se em parte este inconveniente fazendo uso do gráfico de Leach.

Nos estudos a que nos referimos pode dizer-se que na maior parte das vezes o traçado deste gráfico deve ser um dos primeiros trabalhos a levar a efeito.

2) — *Gráfico de Leach*

Em linhas gerais consiste em uma construção gráfica que permite achar as curvas de regolfo para determinado caudal Q, iniciadas em qualquer ponto de perfil onde se criou o obstáculo ao escoamento.

O gráfico é, digamos, constituído por um certo número de diagramas, cada um dos quais dá a cota de regolfo para o mesmo Q em determinado perfil, quando varia a cota da água na barragem ou outra qualquer perturbação. Haverá portanto tantos diagramas quantos os troços em que foi dividida a linha de água para efeitos de aplicação do método. Assim aparecem os diagramas (1-2), (2-3), (3-4), etc.

Para traçar estes diagramas parciais é necessário conhecer um certo número de curvas relativas ao mesmo caudal e iniciadas em pontos diferentes. Se tivermos n curvas, cada um dos diagramas parcelares é dado pelo lugar geométrico de n pontos, que se unem por rectas. Se as cotas iniciais forem suficientemente aproximadas bastarão três pontos.

É preciso notar que o gráfico de Leach só dá solução quando a cota procurada z' (no perfil do obstáculo) está contida no intervalo dado pelos valores de z a partir dos quais foram calculadas as curvas de regolfo necessárias para a construção, a não ser que se estabeleçam extrapolações sempre imprecisas.

Para o traçado do gráfico procede-se do modo seguinte: Em um sistema de eixos coordenados, graduados em alturas, marcam-se como abcissas as cotas atingidas pelo regolfo nos extremos ímpares dos troços e nas ordenadas as correspondentes aos pares. Deste modo os diagramas parciais dispõem-se alternadamente dum lado e do outro da bissetriz do ângulo dos eixos de referência.

Na figura 1 os valores

z_1 z_2 z_3 — são as cotas atingidas no perfil 1, (perfil ímpar do troço 1-2) pelo regolfo, para os três casos de pontos iniciais diferentes.

z'_1 z'_2 z'_3 — idem, idem, no perfil par do troço 1-2 (perfil 2);

z''_1 z''_2 z''_3 — idem, idem, no perfil ímpar do troço 2-3 (perfil 3).

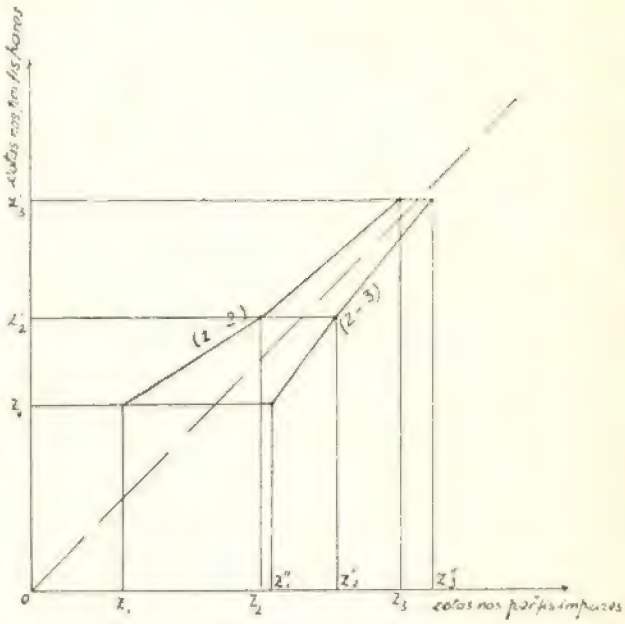


Fig. 1

Por meio duma construção simples traça-se a curva de regolfo correspondente a qualquer ponto inicial compreendido no intervalo de estudo (fig. 2).

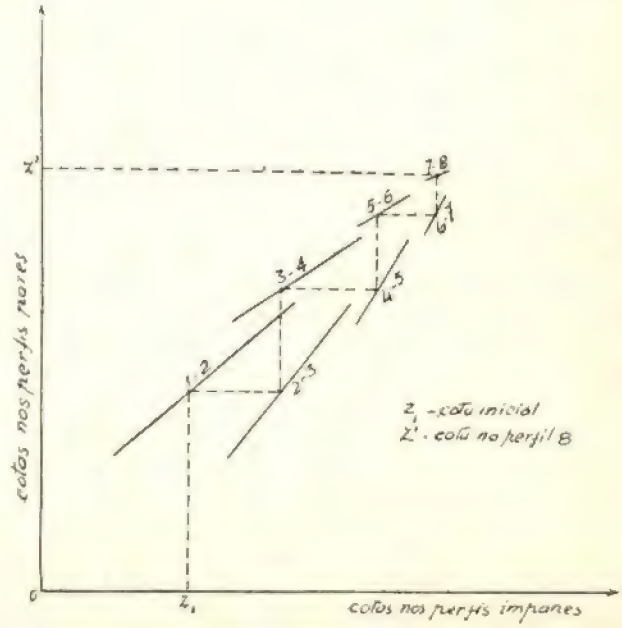


Fig. 2

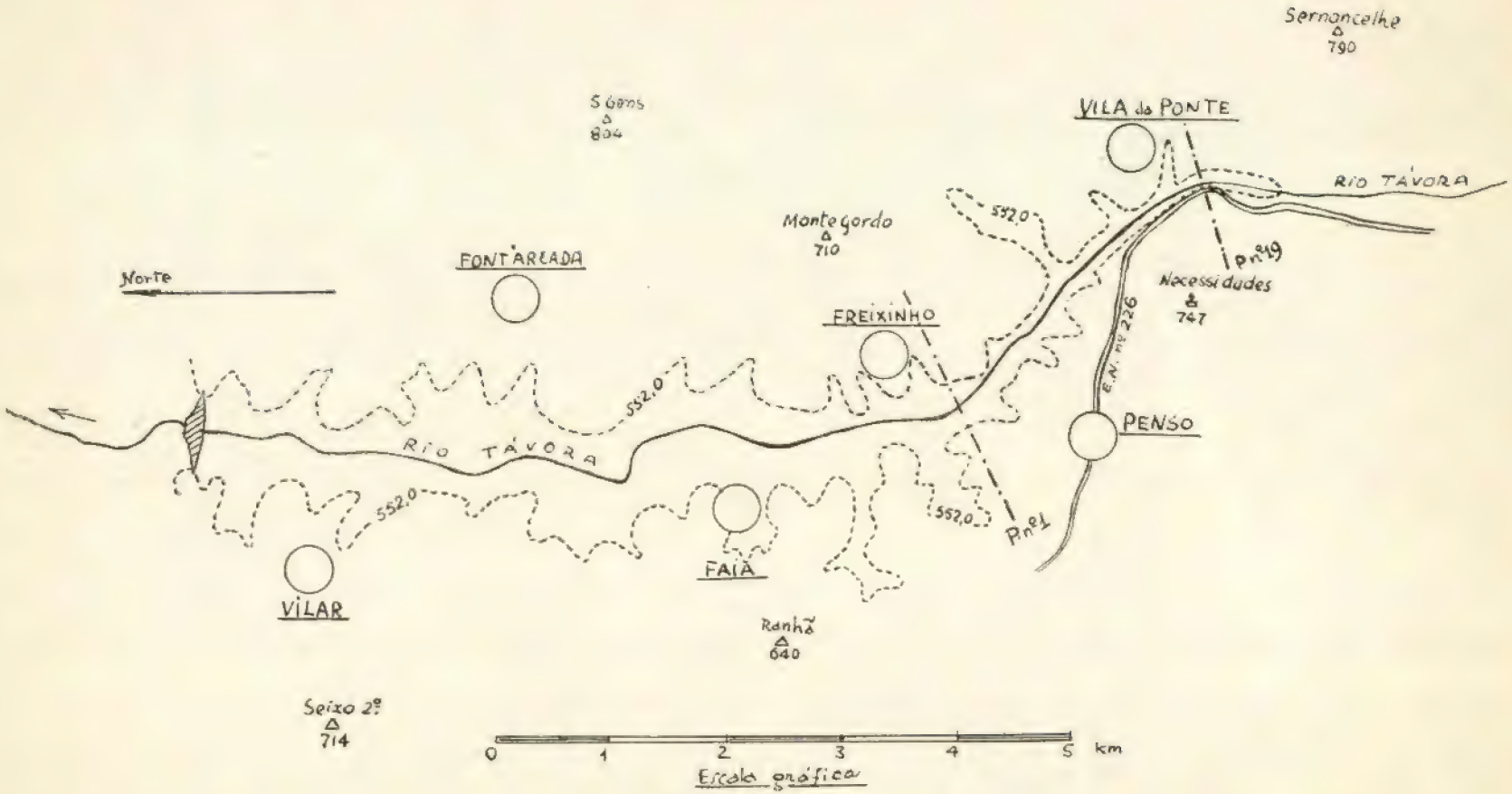

Sernancelhe
790
S Gens
804
VILA da PONTE
RIO TÁVORA
Montegordo
710
552,0
FONTÁRCADA
Norte
FREIXINHO
Necessidades
747
E.N. nº 226
PENSO
RIO TÁVORA
552,0
552,0
552,0
FAIÃ
VILAR
Ranhã
640
Seixo 2º
714
0
1
2
3
4
5
km
Escala gráfica

Fig. 3

3) — *Exemplo de aplicação*

A projectada albufeira de Vilar com a capacidade total de 100×10^6 m^3, estende-se até montante da freguesia de Vila da Ponte, do concelho de Sernancelhe (fig. 3); ao longo da albufeira, do lado da margem esquerda do rio, corre a estrada nacional de 2.ª classe, n.º 226. Pretende-se saber qual a cota máxima que a água pode atingir na barragem descarregadora, para que o nível de regolfo no perfil 19 (fig. 4) esteja 1,85 m abaixo do pavimento da estrada, isto é, não deve ser ultrapassada a cota (553,15). O caudal máximo a considerar no estudo do regolfo é de 600 m^3/$_s$, que se admite constante no espaço.

Para o conveniente estudo do problema dividiu-se o Távora em um certo número de troços bastante curtos a fim de reduzir o mais possível as causas de erro nos cálculos.

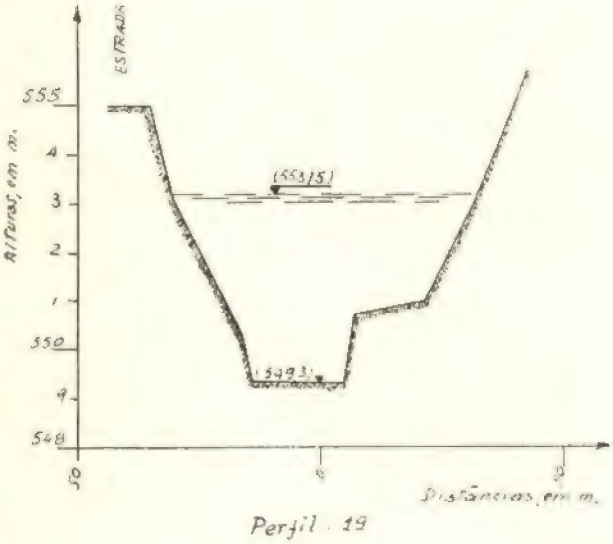


Fig. 4

Levantaram-se os perfis transversais ao rio e para cada um traçaram-se as curvas S (H) e P (H) de que apenas se apresenta as referentes aos perfis 11 e 19 (fig. 5) para poupar espaço. Iniciamos o estudo do regolfo no perfil 1, e não na secção da barragem (fig. 3), porque dadas as grandes dimensões das superfícies molhadas, a influência do obstáculo no escoamento ao longo do entreperfil pode ser considerada nula. Portanto as cotas de água no perfil 1 são as mesmas que na barragem.

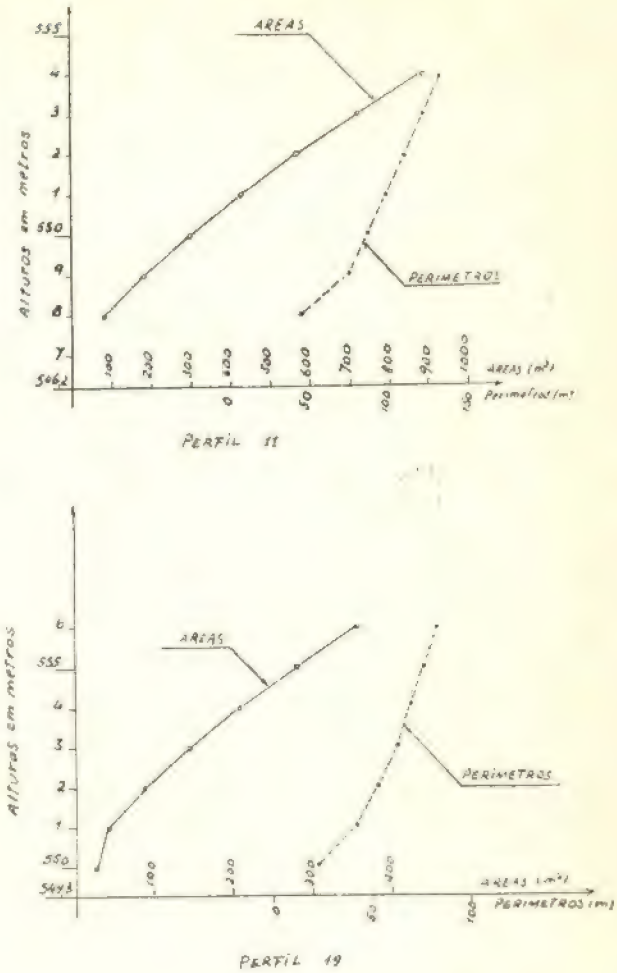


Fig. 5

No quadro n.º 1 apresentam-se as cotas de regolfo nos vários perfis marcados, com a água à cota (551,00) na barragem e o caudal escoado de 600 m^3/$_s$ bem como as várias operações parcelares. A curva foi traçada na figura 6.

Fez-se aplicação do método geral tendo sido considerado:

a) variação da energia cinética dentro de cada troço;

b) uma perda de carga contínua em regime uniforme calculada através da fórmula de Strickler, com o coeficiente de rugosidade médio $k_s = 30$;

c) Uma perda de carga singular em cada troço devida à variação da área das secções

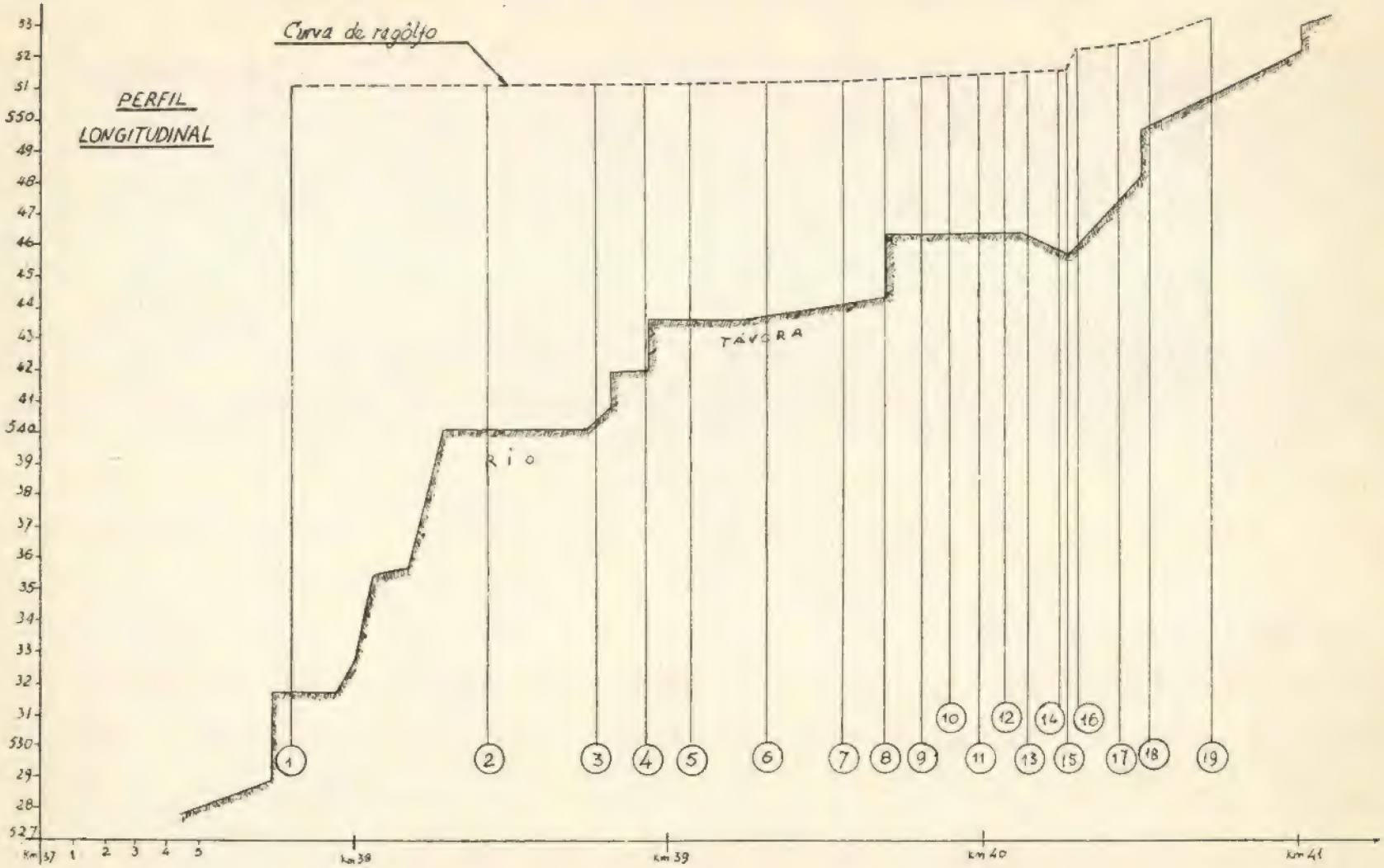

PERFIL
LONGITUDINAL
Curva de ragôlto
TÁVORA
Rio
km 37
km 38
km 39
km 40
km 41

Fig. 6

molhadas ao longo do rio, só considerada quando a velocidade cresce e dada arbitràriamente por uma parcela da variação da energia cinética.

Nestes termos em qualquer caso haverá sempre a considerar a perda de carga de regime uniforme e um termo de expressão

$$k \frac{v^2 - V^2}{2g}$$

em que

k — representa o termo correctivo

v — velocidade média de escoamento no perfil de jusante do troço

V = Idem, idem, no perfil de montante

No cálculo seguiram-se as indicações dadas por Crausse (4.1) para os casos correntes, tomando-se

k = 1 , quando a velocidade no troço diminui

k = 0,5, » » » » » aumenta

Adoptou-se como secção molhada média de cada troço para efeitos de aplicação da fórmula que dá a perda de carga em movimento uniforme, a média das áreas das duas secções relativas aos perfis extremos.

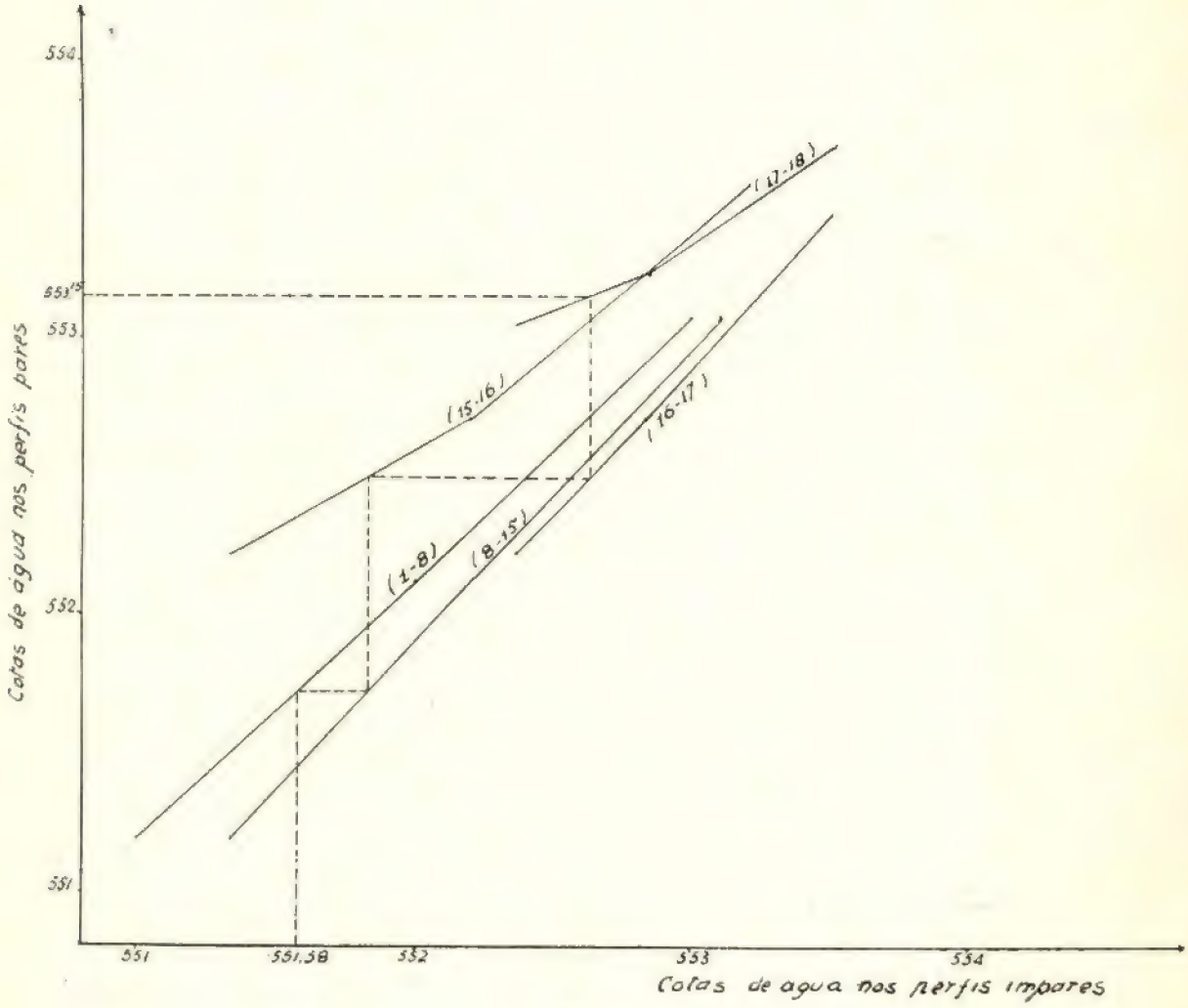


Fig. 7

3.1 — *Construção do gráfico*

Está representado na figura 7. Para tornar o gráfico menos complicado, em lugar

$Q = 600\ m^3/s$ **QUADRO N.º 1** Cota inicial — (551,00)

Perfil	Δ_s (m)	ΔZ (m) (admitido)	Z (m)	S (m^2)	P (m)	V (m/s)	K	$\Delta Z'$ (m)	R (m)	$R^{4/3}$	S^2 (10^4)	$S^2 \times R^{4/3}$	$j \times 10^4$ (perfil)	$j \times 10^4$ (troço)	$\Delta Z''$ (m)	ΔZ (m) (calculado)
1			551,00	2630	264	0,23			10,0	21,5	691,7	14.872	0,03			
	635	0,01					0,5	— 0,013						0,29	0,018	0,005
2			551,01	800	130	0,75			6,2	11,4	64,0	730	0,55			
	335	0,01					0,5	— 0,030						1,25	0,042	0,012
3			551,02	454	80	1,32			5,7	10,0	20,6	206	1,94			
	158	0,08					1	+ 0,063						1,31	0,021	0,084
4			551,10	850	192	0,71			4,4	7,2	72,3	521	0,77			
	140	0,02					1	+ 0,008						0,64	0,009	0,017
5			551,12	1040	236	0,58			4,4	7,2	108,2	779	0,51			
	238	0,01					0,5	— 0,012						0,95	0,023	0,011
6			551,13	670	166	0,90			4,0	6,4	44,9	287	1,39			
	255	0,04					1	+ 0,012						1,27	0,032	0,044
7			551,17	785	212	0,76			3,7	5,7	51,6	351	1,14			
	136	0,02					0,5	— 0,012						2,27	0,031	0,019
8			551,19	590	235	1,02			2,5	3,4	34,8	118	3,39			
	109	0,05					1	+ 0,028						2,25	0,025	0,053
9			551,24	860	260	0,70			3,3	4,9	74,0	363	1,10			
	93,5	0,01					0,5	— 0,005						1,38	0,013	0,008
10			551,25	730	237	0,82			3,1	4,5	53,3	240	1,66			
	96,0	0,00					0,5	— 0,026						2,07	0,020	— 0,006
11			551,25	460	100	1,30			4,6	7,6	21,2	161	2,48			
	82,5	0,04					1	+ 0,013						3,24	0,027	0,040
12			551,29	500	180	1,20			2,8	4,0	25,0	100	4,00			
	68,5	0,02					0,5	— 0,014						4,90	0,034	0,020
13			551,31	425	157	1,41			2,7	3,8	18,1	69	5,80			
	96,5	0,03					0,5	— 0,039						7,45	0,072	0,033
14			551,34	320	107	1,88			3,0	4,3	10,2	44	9,09			
	31	0,00					0,2	— 0,146						44,55	0,138	— 0,008
15			551,34	142	70	4,23			2,0	2,5	2,0	5,	80,00			
	31	0,88					1	+ 0,744						43,78	0,136	0,880
16			552,22	330	100	1,82			3,3	4,9	10,9	53	7,55			
	134	0,15					1	+ 0,054						7,23	0,097	0,151
17			552,37	400	151	1,50			2,6	3,6	16,0	58	6,90			
	97,5	0,08					0,5	— 0,090						17,84	0,174	0,084
18			552,45	250	140	2,40			1,8	2,2	6,3	13,9	28,78			
	192	0,60					0,5	— 0,290						46,14	0,886	0,596
19			553,05	145	62	4,14			2,3	3,0	2,1	6,3	63,49			

QUADRO N.º 2

Cotas do regolfo nos perfis, para diferentes pontos iniciais:

Perfis	Distâncias (m)	Cotas do regolfo correspondentes aos inícios:		
		(553,00)	(552,00)	(551,00)
1		553,00	552,00	551,00
	635			
2		553,00	552,00	551,01
	335			
3		553,00	552,01	551,02
	158			
4		553,04	552,07	551,10
	140			
5		553,05	552,08	551,12
	238			
6		553,05	552,09	551,13
	255			
7		553,07	552,11	551,17
	136			
8		553,07	552,12	551,19
	109			
9		553,08	552,15	551,24
	93,5			
10		553,08	552,15	551,25
	96,0			
11		553,08	552.15	551,25
	82,5			
12		553,10	552,18	551,29
	68,5			
13		553,10	552,19	551,31
	96,5			
14		553,10	552,21	551,34
	31			
15		553,10	552,21	551,34
	31			
16		553,45	552,71	552,22
	134			
17		553,51	552,84	552,37
	97,5			
18		553,53	552,88	552,45
	192			
19		553,68	553,23	553,05

de marcar os diagramas de todos os entre perfis, considerou-se troços compreendendo uma série de perfis, de que não resulta erro apreciável. Desta maneira os diagramas parciais escolhidos ficam suficientemente afastados uns dos outros e o gráfico só ganha em clareza.

No quadro n.º 2 estão indicados os elementos necessários para o traçado. Cada diagrama é dado por três pontos.

O regolfo foi determinado para o caso do escoamento do caudal constante de 600 $m^3/_s$ no troço do rio interessado.

Da figura 7 se conclui que a cota inicial procurada é (551,58).

4) — *Bibliografia*

Sobre o assunto tratado podem ser consultadas as obras seguintes:

4-1) — Hydraulique des anaux découverts en régime permanent, por E. Crausse — páginas 180 e 181.

4-2) — Handbook of Hidraulics, por King — páginas 534 a 537, da 3.ª edição (1939) 7.ª impressão.

4-3) — Engineering Hidraulics, editado por Hunter Rouse, página 631.

C. D. 624.131 : 624.131.52

Determinação do grau de encastramento dos maciços de fundação

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) ÚLPIO NASCIMENTO
Assistente do Laboratório Nacional de Engenharia Civil

A determinação do grau de encastramento dum pilar no terreno de fundação constitui para algumas estruturas condição indispensável para o respectivo dimensionamento. É usual resolver o problema escolhendo, de maneira mais ou menos arbitrária, um dos dois casos extremos — encastramento perfeito ou articulação — quando efectivamente o grau de encastramento se encontra numa posição intermédia que importa conhecer. Neste trabalho apresenta-se uma solução deste complexo problema conseguida à custa de hipóteses muito simplificativas que impõem, por isso, ponderação na respectiva aplicação. Apesar disso, considera-se a expressão a que se chega de possível utilidade na determinação da ordem de grandeza do encastramento de estruturas do tipo das exemplificadas.

Consideremos um pórtico fundado sobre maciços de fundação tal como se representa na figura junta.

Supõem-se válidas todas as hipóteses estabelecidas em anterior trabalho relativo ao cálculo das tensões geradas sobre o terreno pelos maciços de fundação [1]. Admite-se, além disso, que a resistência do terreno é caracterizada pelo seu módulo de resistência E_t e que o assentamento ou deslocamento δ sofrido por um maciço de largura l, quando o terreno é por ele carregado com uma tensão σ, é dado pela expressão [2]

$$\delta = \frac{\sigma}{E_t}\, l \qquad (1)$$

sendo l a menor das duas dimensões da base do maciço.

Define-se grau de encastramento K do maciço de fundação como sendo a relação entre o momento efectivo a que o maciço submete o pilar do pórtico (M_f) e o momento a que o submeteria se o encastramento fosse perfeito (M_p), isto é, se o maciço não sofresse nenhuma rotação quando solicitado pelo pilar.

Como estes momentos, em regime elástico como se supõe, são proporcionais aos respectivos ângulos de rotação, pode escrever-se que

$$K = \frac{M_f}{M_p} = \frac{\theta_p - \theta_f}{\theta_p} \qquad (2)$$

O momento (M), correspondente ao encastramento perfeito na base B do pilar (ver figura), exprime-se aproximadamente em função do ângulo θ_p, correspondente ao deslocamento do ponto A do pilar onde o momento é nulo, pela fórmula:

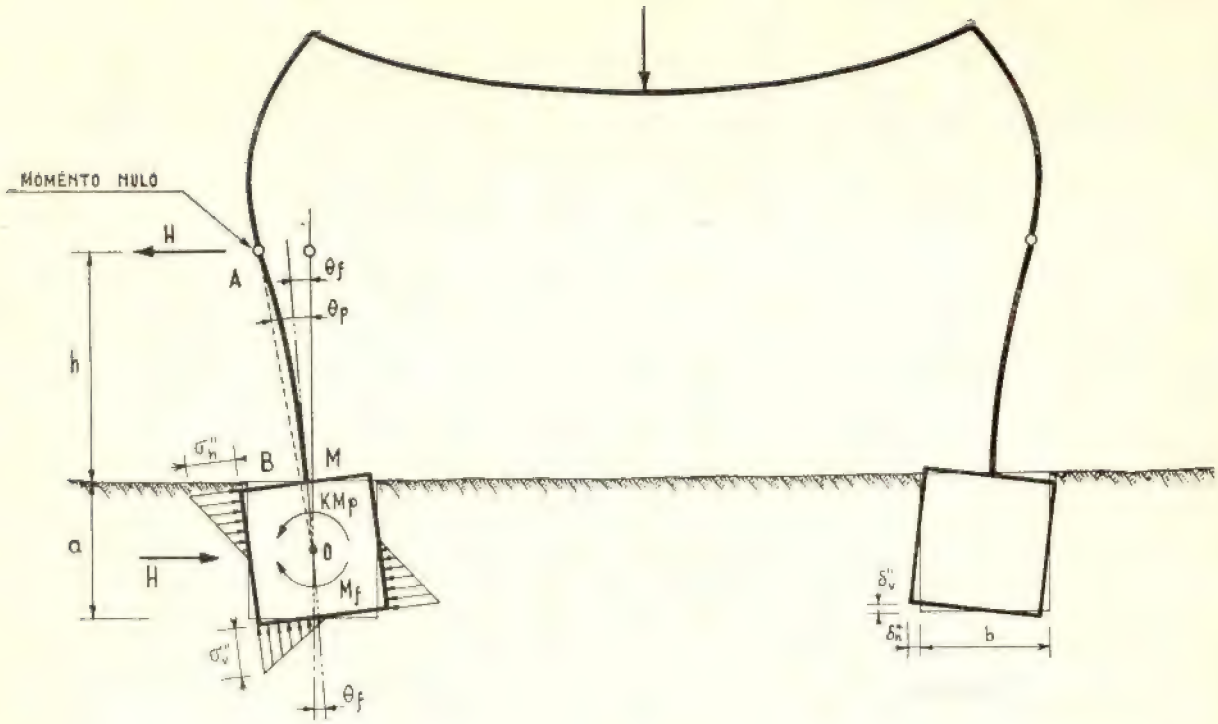
$$M = \frac{3\,EI}{h}\,\theta_p \qquad (3)$$

sendo E e I o módulo de elasticidade e o momento de inércia do pilar, e h a altura do ponto A acima do encastramento B.

---

(1) «*Tensões Geradas no Terreno pelos Maciços de Fundação*», «Técnica», n.º 224, Lisboa, Julho 1952, pág. 594.

(2) «*Cálculo Expedito de Tensões de Segurança e de Assentamentos de Fundações*», «Técnica», n.º 226, Lisboa, Novembro 1952, pág. 125. Neste trabalho o módulo de resistência está designado pela letra M em vez de E_t.



Em relação ao centro O do maciço o momento será

$$M_p = M + \frac{a}{2} H = (1 + \frac{aH}{2M}) M = \alpha M \quad (4)$$

sendo

$$\alpha = 1 + \frac{aH}{2M} \quad (5)$$

um coeficiente corrector que dá conta da influência em M_p da profundidade da fundação.

O momento de todas as reacções do terreno sobre o maciço em relação ao respectivo centro (O) é, como se deduz da respectiva equação de equilíbrio de rotação:

$$M_f = \frac{c}{12} (2a^2 \sigma''_h + b^2 \sigma''_v) \quad (6)$$

sendo *a*, *b* e *c* a altura, comprimento e largura do maciço de fundação; σ''_h e σ''_v as tensões induzidas no terreno pela rotação do maciço (ver figura).

Para exprimir a equação (6) em função de θ_f, recorre-se à expressão (1) generalizando a sua aplicação ao caso das faces laterais do maciço.

Obtém-se então:

$$\sigma''_h = \frac{E_t}{c} \delta''_h \quad e \quad \sigma''_v = \frac{E_t}{c} \delta''_v \quad (7)$$

se for *c* a menor das três dimensões do maciço.

Como porém

$$\delta''_h = \frac{a}{2} \theta_f \quad e \quad \delta''_v = \frac{b}{2} \theta_f \quad (8)$$

vem, substituindo em (6)

$$M_f = \frac{E_t}{24} (2a^3 + b^3) \theta_f \quad (9)$$

O equilíbrio de rotação do maciço exige que sejam iguais os momentos, em relação ao centro respectivo, provenientes do pilar ($K \alpha M$) e da fundação (M_f); isto é:

$$K \alpha M = M \quad (10)$$

Substituindo (3) e (9), obtém-se

$$K \alpha \frac{3EI}{h} \theta_p = \frac{E_t}{24} (2a^3 + b^3) \theta_f$$

De (2) tira-se que

$$\theta_f = (1 - K)\,\theta_p$$

donde, eliminando θ_p, e resolvendo em relação a K,

$$K = \frac{1}{1 + 72\,\alpha\,\dfrac{E}{E_t}\,\dfrac{I}{h\,(2a^3 + b^3)}} \qquad (11)$$

(para $c < a, b$)

Expressão que nos dá o pretendido grau de encastramento.

Quando *c* for a maior das três dimensões, já as expressões (7) terão que ser substituídas por:

$$\sigma'_h = \frac{E_t}{\dfrac{a}{2}}\,\delta''_h \quad \text{e} \quad \sigma'_v = \frac{E_t}{\dfrac{b}{2}}\,\delta''_v \qquad (12)$$

e o valor de K, obtido de modo análogo, será:

$$K = \frac{1}{1 + 36\,\alpha\,\dfrac{E}{E_t}\,\dfrac{I}{c\,h\,(2a^2 + b^2)}} \qquad (13)$$

(para $c > a, b$)

Apliquemos o método a dois exemplos:

1.º exemplo — Fundação de um pórtico de 4,0 m de altura constituído por pilares com a secção de 0,9 × 0,4 m fundados em terrenos miocénicos constituídos por aréolas e areias argilosas bem consolidadas. As solicitações do pórtico na base do pilar são as seguintes:

Componente vertical . . . V = 53 t
Componente horizontal . N = 13 t
Momento . . . . . M = 25 ton. m

Calculemos o grau de encastramento que se obtém para o pilar do pórtico com um maciço de fundação paralelipipédico, constituído por betão magro, betonado directamente contra o cabouco formado pelo terreno natural.

Dimensões do maciço:

Profundidade a = 2,5 m
Base paralela ao pórtico b = 1,8 m
Base normal ao pórtico c = 0,8 m

— Momento de inércia do pilar:

$$I = \frac{0{,}4 \times 0{,}9^3}{12} = 0{,}024 \text{ m}^4$$

— Coeficiente α (eq, 5):

$$\alpha = 1 + \frac{2{,}5 \times 13}{2 \times 25} = 1{,}7$$

— Módulo de resistência do terreno (ver «Técnica» de Novembro de 1952, atrás referida):

$$E_t \doteq 3.000 \text{ kg/cm}^2$$

— Módulo de elasticidade do betão:

$$E = 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

— Altura no pilar do ponto de momento nulo (estimada):

$$h = 2{,}0 \text{ m}$$

— grau de encastramento (eq. 11)

$$K = \frac{1}{1 + 72 \times 1{,}7 \times \dfrac{3 \times 10^5}{3 \times 10^3} \times \dfrac{0{,}024}{2{,}0\,(2 \times 2{,}5^3 + 1{,}8^3)}} = 0{,}2$$

2.º exemplo: — Fundação de uma série de pórticos iguais aos do exemplo anterior, afastados entre si de 4,0 m. Supõem-se as mesmas condições de terreno mas substitui-se a fundação discontínua por uma fundação contínua, comum a todos os pórticos, constituída por um lintel corrido com a mesma profundidade de 2,5 m e 0,8 m de largura.

As dimensões do maciço serão então:

Profundidade a = 2,5 m
Base paralela ao pórtico b = 0,8 m
Base normal ao pórtico c = 4,0 m

— grau de encastramento (eq. 13)

$$K = \frac{1}{1 + 36 \times 1{,}7 \times \dfrac{3 \times 10^5}{3 \times 10^3}\,\dfrac{0{,}024}{4{,}0 \times 2{,}0\,(2 \times 2{,}5^2 + 0{,}8^2)}} = 0{,}4$$

O grau de encastramento duplicou portanto.

Lisboa, Março de 1953.

C. D. 621.311.15/9

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.) preparadas nos Serviços do R. N. C. a cargo da Companhia Nacional de Electricidade —

NOTA: *A produção e o consumo da rede das empresas do R. N. C. representam actualmente cerca de 90 % dos respectivos totais do país.*

I — Elementos gerais

a) Mensais (mês de Janeiro).

10^6 kWh

	1952	1953	Variação %
Produção hidráulica (P_h)	90,8	124,7 (2)	+ 37,3 %
Produção térmica (P_t) . .	7,4	4,9 (3)	— 33,8 %
Produção total (P_T) . . .	98,2	129,6	+ 32,0 %
Cons. electroquímico (C_{eq})	6,8	28,5	+316,3 %
Outros consumos ($C_T - C_{eq}$)	89,6	99,5	+ 11,0 %
Consumo total (C_T) (1) . .	96,4	128,0	+ 32,7 %

Notas: (1) No consumo total (C_T) estão incluídas as perdas nas redes de transporte e de distribuição.
(2) 96,2 % P_T. (3) 3,8 % P_T.

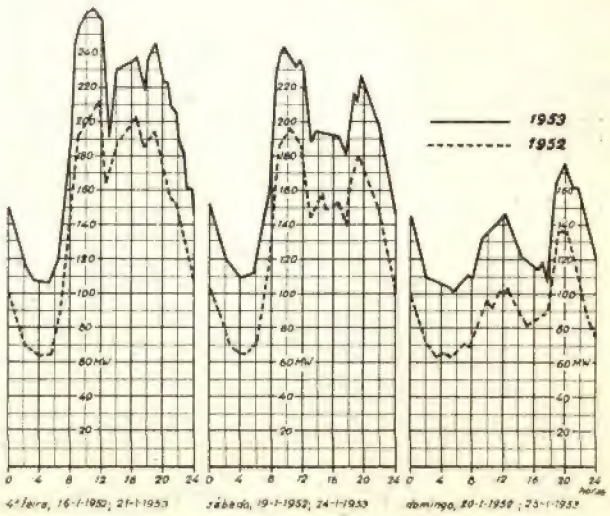
II — Diagramas de carga da produção

	4.ª feira: 16-1-1952; 21-1-1953	
	1952	1953
Produção hidráulica (P_h) — MWh	3.216,1	4.487,5
Produção térmica (P_t) — MWh. .	241,0	129,7
Produção total (P_T) — MWh. . .	3.457,1	4.617,2
Utilização da ponta (U) — horas	16,27	17,42
Factor de carga (α).	0,68	0,73
Relação $\frac{\text{Pot. mín.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,30	0,40

III — Energia armazenada nas principais albufeiras no fim do mês de Janeiro de 1953

Albufeiras	Energia armazenada	
	10^6 kWh	% (1)
Venda Nova	39,2	47,4
Guilhofrei	6,0	72,4
Lagoa Comprida	16,9	72,4
Santa Luzia	18,2	54,2
Castelo do Bode	106,4	72,9
Pracana	10,0	100,0
Póvoa	2,4	24,5
Total (2)	202,7	61,9

Notas: (1) Coeficiente de enchimento em energia.
(2) Total da rede das empresas do R. N. C.



C. D. 624.159.2

OUTRO CASO DE ATAQUE DO "TEREDO"

PELO ENG.º CIVIL I. S. T. RAUL DA SILVA MARQUES

Preâmbulo

Anos atrás, num número da «Técnica» de 1944, relatou o Sr. Eng.º João Carlos Alves um caso de ataque do «teredo» acontecido no Tejo, na enseada do Alfeite, durante a execução das obras do Novo Arsenal da Marinha.

Agora vamos nós relatar um outro caso de ataque de uma ponte de serviço de madeira, sucedido este no Ultramar Português, Província de Moçambique, nas obras da ponte-cais de Quelimane.

Desta vez, uma ponte de serviço de madeira que suportava e onde se movia um bate-estacas metálico com o qual têm sido cravadas as estacas da ponte de Quelimane, por já estar reconhecidamente atacada por moluscos, cedeu e ocasionou a queda ao rio do bate-estacas que, na derrocada destruíu parte da ponte de serviço e umas tantas das estacas de betão, precipitando também consigo algumas dezenas de operários que trabalhavam no bate-estacas e na reparação da ponte, sem acidentes pessoais graves, felizmente, o que, no meio do prejuízo causado pelo desastre, foi motivo de regozijo para todos os responsáveis e interessados.

Neste caso, dissemos, o ataque já era conhecido e só o desastre foi insólito por se ter dado no momento em que o bate-estacas estava parado, quando se trabalhava com todas as precauções no esforço da própria ponte de serviço.

Descrição geral

O bate-estacas em causa, destinado a cravar as estacas de betão definitivas, trabalhava sobre uma ponte provisória de madeira, com a configuração geral da ponte-cais definitiva (Fig. 1).

A ponte provisória era apoiada em estacas de eucalipto, importadas da África do

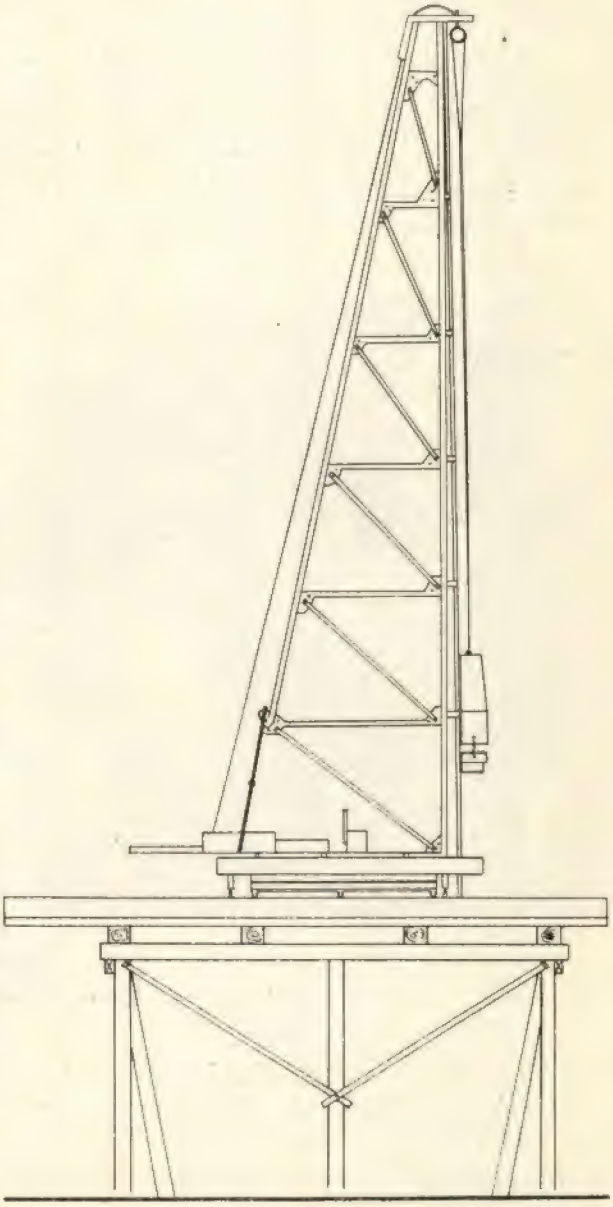


Fig. 1

Sul e originárias do South African Forestry Department, Eshowe, Província do Natal.

Intentou-se no início dos trabalhos, empregar, para o efeito, estacas de madeira dura desta Província, mas foi-se obrigado a desistir do intuito por não se ter conseguido obter peças suficientemente compridas e direitas.

A ponte de serviço foi construída com o auxílio de um pequeno bate-estacas de madeira, trabalhando em «cantilever», apropriado para este género de trabalho. É ela constituída por uma série de cavaletes espaçados de 2,5 m e formados por 3 ou 5 estacas verticais de 0,30 m de diâmetro médio, ligadas nas cabeças por dois pranchões de 30 cm × 15 cm. As estacas são devidamente contraventadas e só as exteriores recebem directamente a carga transmitida pelas vigas de apoio dos carris do bate-estacas.

de um eixo vertical e outro em torno de um eixo horizontal, o que lhe permite cravar estacas inclinadas em todas as direcções.

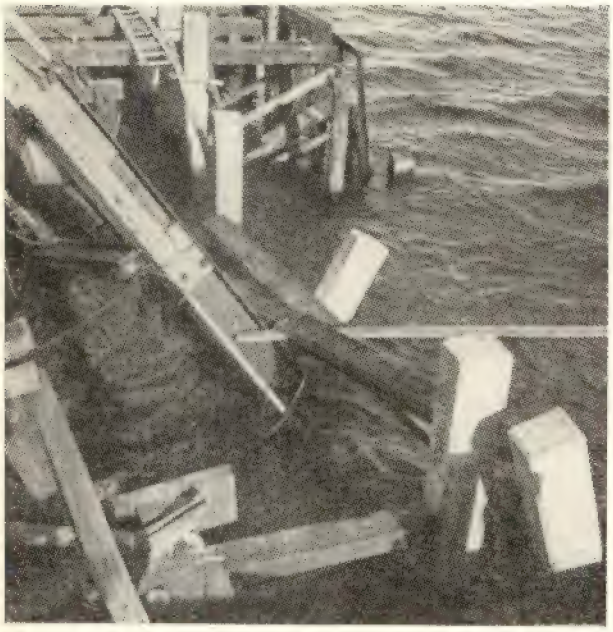
O peso do equipamento é o seguinte:

Carrinho	8,5 t
Mesa giratória, estrutura, guincho e motor . . .	40,5 t
	49,0 t

No local as marés oscilam entre as cotas (+ 0,40 m) e (+ 4,30 m).

Descrição do acidente e causas próximas prováveis

O acidente deu-se de-repente, sem dar tempo ao alarme — aparentemente devido



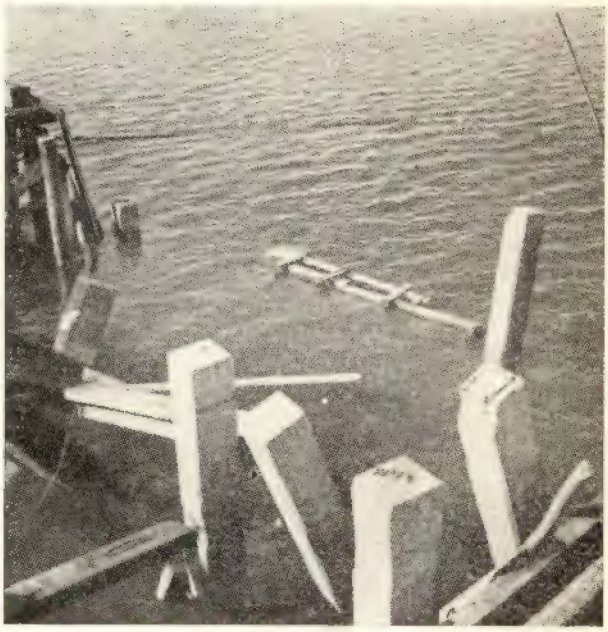


Fig. 2
Aspectos do bate-estacas e da ponte após o acidente

O bate-estacas sinistrado é um aparelho universal, com 25 m de altura e um martelo de 5 toneladas, accionado por um motor de combustão interna, podendo cravar estacas até 23 m de comprimento e 8 t de peso.

A estrutura do bate-estacas tem movimento no sentido transversal da ponte e dois movimentos de rotação, um em torno

às estacas da fila do lado do rio terem cedido —, tendo-se seguido o abatimento geral da ponte de serviço na extensão de 15 m.

A operação que estava sendo executada era a de levantar as guias móveis do martelo com um guincho manual.

A causa próxima do acidente, que o desencadeou, parece ter residido numa ra-

jada de vento com a velocidade de 46 km/ /hora, sucedida à hora exacta do desastre, quando a média fora, durante o dia, de 19,4 km/hora.

A rajada, fazendo vibrar a torre do aparelho, teria provocado um esforço dinâmico suficiente para romper a precária estabilidade do conjunto formado pelo bate-estacas e seu suporte.

O ataque das estacas da ponte-cais já há muito era conhecido. Foi notado pela primeira vez, em 24 de Abril de 1951, quando se retirou da água uma estaca partida que não fazia parte da ponte. A estaca estava profundamente atacada por moluscos xilófagos e verificou-se imediatamente que havia um apreciável número de estacas já cravadas mais ou menos atacadas pelos mesmos agentes destruidores.

A estaca retirada da água estava cravada havia 6 meses e o troço destacado tinha o comprimento de 5,60 m. Como a parte superior tinha estado à cota (+4,10 m), a extremidade inferior correspondia à cota (— 1,50 m).

No local, o fundo lodoso estava a cota (— 2,40 m). A zona atacada, pois, encontrava-se para baixo da cota (+ 1,50 m).

O fenómeno mereceu a atenção dos responsáveis e foram tomadas as medidas julgadas aconselháveis na ocasião.

Foi logo consultado o Museu Álvaro de Castro, de Lourenço Marques, a única entidade oficial que poderia prestar os necessários esclarecimentos sobre o caso.

A resposta sobre a perfuração das estacas, mais tarde ampliada pela opinião da Estação de Biologia Marítima de Lisboa, adrede consultada, esclareceu que:

a) A infestação principal das estacas não era devida a teredos (se bem que algumas cavidades tubulares lhes pudessem ser atribuídas), mas sim a uma espécie de família Pholadidae (Pelocípodes), Martesia Striata (Linn.), assinalada no Índico;

b) O teredo é atacado pelo «Nereis Fucata», anelídeo marinho que no estado adulto vive no lodo, a existência do qual poderia justificar o facto do ataque ser menos intenso junto ao fundo;

c) A «Martesia» ataca as estacas desde o nível do baixa-mar até ao lodo onde estão enterradas; estudos feitos na Austrália indicam que a reprodução da «Martesia» está restrita ao período do ano de mais elevadas temperaturas de água; os adultos chegam a atingir dimensões da ordem de 5 cm a 8 cm; quando o ataque é forte, as estacas podem chegar a ser destruídas de fora para dentro numa camada com igual espessura.

Entretanto a zona então atacada foi reforçada com novas estacas e pôde ser transportada pelo bate-estacas sem perigo de maior.

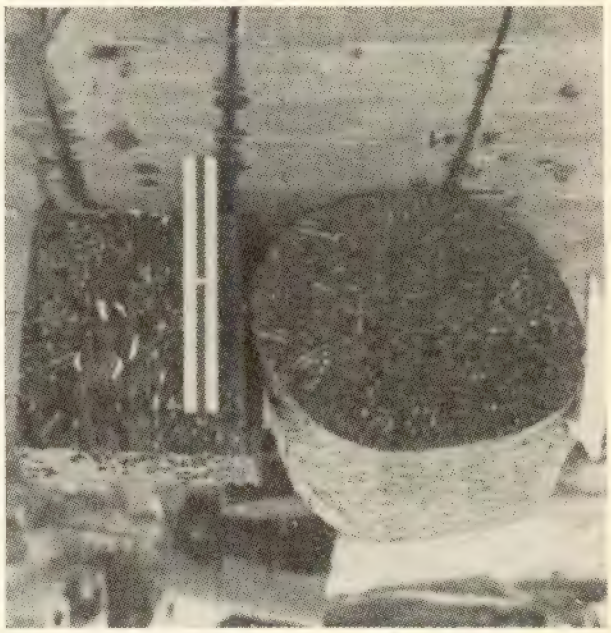


Fig. 3

Depois deste aviso as estacas passaram a ser preservadas, por meio de pintura, primeiro com «Cuprinol», depois com «Carbolinium» e alcatrão e mais tarde com o produto «Atlas» e alcatrão.

Vistorias posteriores feitas nos meses mais próximos mostraram escasso ou nulo ataque nas estacas preservadas e ataque sensível nas estacas sem protecção cravadas em época próxima.

Em presença destes resultados continuou normalmente a construção da ponte de ser-

viço, mas um atraso imprevisto na execução da obra definitiva retardou, primeiro a utilização da ponte pelo bate-estacas, e depois obrigou à imobilização deste sobre a ponte, a qual, embora imunizada, ia sofrendo o ataque progressivo dos terríveis moluscos.

Quando se decidiu e foi possível proceder à renovação da ponte de serviço, deu-se o desastre, decorridos 6 dias de trabalho em direcção à parte mais antiga, portanto, mais atingida.

As estacas quebradas estavam mergulhadas há cerca de 8 meses e constatou-se que o ataque nessas estacas a cotas abaixo dos baixamares era mais intenso que o ataque já verificado «de visu» a cotas superiores.

Na fig. 3 mostra-se o estado da madeira das estacas no local e à data do acidente.

Conclusões

Desta vez não foi o teredo o único responsável, nem talvez o principal, do ataque maciço à ponte de serviço da obra ponte-cais de Quelimane. As principais culpas parecem caber à «Martesia Striata».

Se no título do artigo se fez referência ao teredo foi para estabelecer a analogia com o título do artigo do Sr. Eng.º Carlos Alves e porque o «teredo» é o mais comum dos variadíssimos moluscos que podem atacar as madeiras mergulhadas.

As estacas de eucalipto não preservadas ficaram completamente atacadas ao fim de 5 meses; as mesmas estacas preservadas duraram 8 meses. A acção dos produtos empregados para defender as estacas prolongou-lhes a vida nuns escassos 3 meses.

Como se viu, e é assinalado nos livros da especialidade, há frequentemente, nestes ataques, cooperação de 2 ou mais dos agentes destruidores.

O conhecimento do assunto diz-nos que na costa oriental da África se notam ataques de moluscos xilófagos, de Durban até Moçambique, pelo menos. Porém, a «Martesia Striata» tem sido encontrada em Hawai, Filipinas, Golfo do México, Flórida, Cabo e Porto Rico.

Como no caso já relatado com tanta proficiência pelo Sr. Eng.º João Carlos Alves, que dispensa agora mais pormenores no respeitante à descrição dos agentes destruidores em causa, espero e desejo que esta nova e modesta informação possa servir de aviso e seja útil a todos aqueles que lidam com madeiras mergulhadas na água do mar.

BIBLIOGRAFIA

1.º — «Um caso insólito de ataque do teredo» — Eng.º João Carlos Alves — *Técnica* — 1944.

2.º — «Pile foundations» — Robert D. Chellis — 1951.

Realizam-se em fins de Abril — em data que fixaremos brevemente — as Conferências que haviam sido adiadas — sobre problemas financeiros na Política do Fomento, pelo Prof. Dr. Pinto Barbosa, e «Colonização Orientada», proferida pelo Prof. Dr. Jesus Nunes dos Santos.

DO MUNDO TÉCNICO

C. D. 512.24

Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de Cross

Por J. KOSTRO e L. BORRO
«La Ingenieria», Julho 1950

A necessidade de resolver sistemas de equações lineares, da forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = A_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}\,x_n = A_n \end{cases}$$

apresenta-se frequentemente na prática, por exemplo em problemas de electrotecnia e de estática. A solução geral do problema, pelo método de Cramer, não é prática quando o número de equações é elevado (maior que três). Este facto tem levado os investigadores a procurar outros processos de cálculo mais práticos, porém não se encontrou nenhum que resolva o problema de forma tão simples como o que a seguir se expõe, baseado no método de Cross, de aplicação corrente no cálculo de estruturas hiperstáticas.

No que se segue explicaremos a maneira de proceder por meio de exemplos; o leitor interessado encontrará o fundamento do método, no artigo original. Tudo se resume em efectuar um certo número de multiplicações, divisões e somas, inscrevendo os dados do problema e os resultados das operações em quadros de valores numéricos da maneira exposta a seguir. Os valores das incógnitas são dados por séries ràpidamente convergentes, cujos termos podem ser calculados exclusivamente com uma régua de cálculo, obtendo-se erros inferiores a 1 %.

Dado o sistema a resolver há, antes de mais que averiguar se os coeficientes a_{mn}, que afectam a incógnita x_n, são tais que, na sua maior parte, verificam: $a_{mn} > a_{nn}$; em caso afirmativo, devem as equações ser ordenadas de modo a ter-se; $a_{mn} < a_{nn}$, (se os coeficientes a_m nas colunas x_n apresentam a particularidade de serem $a_{mn} > a_{nn}$ na sua maior parte, havendo então que ordenar as equações de forma a verificar-se a relação $a_{mn} < a_{nn}$). Consegue-se assim obter a máxima facilidade de cálculo, por ser mais rápida a convergência das séries mencionadas. Assim, por exemplo,

dado o sistema

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 10\,x_2 + 1\,x_3 = 8 \\ 12\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 20 \\ 5\,x_1 + 17\,x_2 + 6\,x_3 = 15 \end{cases}$$

ordenam-se as equações do seguinte modo:

$$\begin{cases} 12\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 20 \\ 2\,x_1 + 10\,x_2 + 1\,x_3 = 8 \\ 5\,x_1 + 17\,x_2 + 6\,x_3 = 15 \end{cases}$$

Exemplo I — Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 8 \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 = 20 \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 + 17\,x_3 = 15 \end{cases}$$

Desenha-se um quadro encimado pelas incógnitas a determinar ($x_1\ x_2\ x_3$) e com um número de colunas igual ao de coeficiente das incógnitas, inscritos na ordem indicada (para x_1, os coeficientes da 1.ª, 2.ª e 3.ª equações; para x_2 os coeficientes das 2.ª, 1.ª e 3.ª equações; para x_3 os coeficientes das 3.ª, 1.ª e 2.ª equações). Os coeficientes são portanto inscritos por ordem crescente dos índices, alterando-se apenas o referente à equação da ordem da incógnita — a_{nn} — que passa para 1.º lugar. Na 2.ª linha do quadro escreve-se: 1, na 1.ª coluna correspondente a cada incógnita, e nas restantes colunas os valores α iguais aos cocientes, com o sinal trocado, do coeficiente que lhe corresponde pelo da 1.ª coluna (teremos para x_1, sucessivamente 1, $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -0{,}3$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -0{,}5$; para x_2, 1, $-\frac{a_{12}}{a_{22}} = -0{,}167$, $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -0{,}5$; e para x_3, 1, $-\frac{a_{13}}{a_{33}} = -0{,}059$, $-\frac{a_{23}}{a_{33}} = -0{,}236$).

Para completar a inscrição dos dados no quadro, resta escrever, na 3.ª linha, e na 1.ª coluna correspondente a cada uma das incógnitas, os termos independentes do sistema ($A_1 = 8$, $A_2 = 20$, $A_3 = 15$). Teremos:

	x_1			x_2			x_3		
	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{22}	a_{12}	a_{32}	a_{33}	a_{13}	a_{23}
	+ 10	+ 3	+ 5	+ 12	+ 2	+ 6	+ 17	+ 1	+ 4
α	1	— 0,3	— 0,5	1	— 0,167	— 0,5	1	— 0,059	— 0,236
	+ 8,000	-	-	+ 20,000	-	-	+ 15,000	-	-
	— 3,070	— 2,94	— 0,130	— 2,400 / 17,600	— 2,400	-	— 12,800 / 2,200	— 4,000	— 8,800
	— 0,146	— 0,067	— 0,079	+ 0,401	+ 0,921	— 0,520	+ 1,334	+ 1,535	— 0,201
	+ 0,033	+ 0,045	— 0,012	— 0,270	+ 0,044	— 0,314	+ 0,203	+ 0,073	+ 0,130
	0,000	0,000	0,000	— 0,048	0,000	— 0,048	— 0,016	— 0,016	- 0,000
	+ 4,817	$x_1 = \frac{4,817}{10} = 0,4817$		+ 17,683	$x_2 = \frac{17,683}{12} = 1,472$		+ 3,721	$x_3 = \frac{3,721}{17} = 0,219$	

Preenchido o quadro até onde se indicar, as operações prosseguem do seguinte modo:

Zona de x_1 — Multiplica-se o valor da 3.ª linha pelos valores da 2.ª linha, e inscrevem-se os resultados na 4.ª linha e nas colunas correspondentes aos coeficientes com os índices trocados. Teremos $8,000 \times (a_{21} = -0,3) = -2,400$ (que se inscreve na coluna encimada por a_{12}, na zona da incógnita x_2) e $8,000 \times (a_{31} = -0,5) = -4,000$ (inscrito na coluna a_{13}).

Zona de x_2 — Somam-se os valores $20,000 - 2,400 = +17,600$ inscrito na 3.ª e 4.ª linhas, o resultado é multiplicado sucessivamente pelos valores da 2.ª linha, e inscritos os produtos nas colunas correspondentes aos coeficientes, com a ordem dos índices trocada. Teremos $17,600 \times (a_{12} = 0,167) = -2,94$ inscrito na coluna a_{21} da Zona de x_1 e $17,600 \times (a_{32} = -0,5) = -8,800$ indicado no quadro na coluna correspondente a a_{23} de x_3.

Zona de x_3 — Somam-se os valores da 3.ª e 4.ª linhas $15,00 - 4,00 - 8,00 = 2,200$ e o resultado multiplica-se sucessivamente pelos valores da 2.ª linha do quadro: $2,200 \times (a_{13} = -0,052) = -0,130$, que se inscreve na coluna a_{31} e $2,200 \times (a_{23} = -0,236) = -0,520$ que se inscreve na linha disponível da coluna a_{32}.

Regressa-se de novo à zona de incógnita x_1, somando os últimos valores inscritos: $-2,94 - 0,130 = -3,070$, soma que se escreve na 1.ª coluna e efectuam-se sucessivamente as multiplicações $-3,07 \times (a_{21} = -0,3) = +0,921$ (que se escreve na coluna a_{12}) e $-3,07 \times (a_{31} = -0,5) = +1,535$ (que se escreve na coluna a_{13}).

As operações prosseguem até que se obtenham valores considerados despresíveis. Finalmente, somam-se as parcelas da 1.ª coluna de cada zona, abaixo do traço forte, atendendo aos sinais das parcelas, e dividem-se os resultados pelo 1.º número inscrito na 1.ª coluna.

Exemplo II — A fim de familiarizar o leitor com a prática deste método, tão simples, e rápido apresentamos um sistema de 7 equações a 7 incógnitas. Os cálculos foram feitos pelos autores, com régua de cálculo, apenas em cerca de 1 hora de trabalho. Dado o elevado número de colunas, o cálculo, na parte relativa a cada incógnita, é agora apresentado em seu quadro.

$$\begin{cases} 6,5\,x_1 + 2,4\,x_2 + 0,0\,x_3 + 0,0\,x_4 + 2,0\,x_5 + 0,7\,x_6 + 0,0\,x_7 = +1,1 \\ 2,0\,x_1 - 9,5\,x_2 + 1,5\,x_3 + 1,0\,x_4 + 0,0\,x_5 - 4,0\,x_6 - 1,0\,x_7 = -4,4 \\ 0,0\,x_1 + 2,0\,x_2 + 7,5\,x_3 + 0,0\,x_4 + 1,6\,x_5 - 2,3\,x_6 + 1,2\,x_7 = +6,1 \\ 1,0\,x_1 - 1,0\,x_2 + 0,0\,x_3 - 5,0\,x_4 + 3,0\,x_5 + 0,0\,x_6 - 1,0\,x_7 = -2,0 \\ 0,0\,x_1 + 3,0\,x_2 - 1,5\,x_3 + 2,0\,x_4 + 9,0\,x_5 + 1,0\,x_6 - 1,5\,x_7 = +1,5 \\ 3,0\,x_1 + 1,5\,x_2 + 2,0\,x_3 + 0,0\,x_4 - 2,0\,x_5 + 8,0\,x_6 + 0,0\,x_7 = +3,0 \\ -1,5\,x_1 + 2,5\,x_2 - 1,7\,x_3 - 1,5\,x_4 + 3,5\,x_5 - 2,0\,x_6 + 5,0\,x_7 = +3,0 \end{cases}$$

	x_1						
	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	a_{51}	a_{61}	a_{71}
	+ 6,5	+ 2,0	0	+ 1,0	0	+ 3,0	− 1,5
α	1	− 0,308	0	− 0,154	0	− 0,462	+ 0,231
	+ 1,1000	-	-	-	-	-	-
	− 1,3193	− 1,2000	-	-	− 0,0790	− 0,0403	-
	+ 0,0460	+ 0,5200	-	-	− 0,3520	− 0,1220	-
	+ 0,2195	+ 0,1820	-	-	+ 0,3750	0,0000	-
	− 0,0404	− 0,0404	-	-	0,0000	0,0000	-
	+ 0,0058	$x_1 = \frac{0,0058}{6,5} \simeq 0,00089$					

	x_2						
	a_{22}	a_{12}	a_{32}	a_{42}	a_{52}	a_{62}	a_{72}
	− 9,5	+ 2,4	+ 2,0	− 1,0	+ 3,0	+ 1,5	+ 2,5
α	1	+ 0,253	+ 0,211	− 0,105	+ 0,316	+ 0,158	+ 0,263
	− 4,4000	-	-	-	-	-	-
	− 0,3390 − 4,7390	− 0,3390	-	-	-	-	-
	+ 2,0520	+ 0,4060	+ 1,0200	− 0,0334	-	+ 0,2300	+ 0,7300
	+ 0,7213	− 0,0142	+ 0,0745	− 0,0116	-	+ 0,6930	− 0,0204
	− 0,1594	− 0,0675	− 0,0585	− 0,1260	-	− 0,0114	+ 0,1040
	+ 0,0085	0,0000	+ 0,0257	+ 0,0287	-	− 0,0459	0,0000
	− 2,1166	$x_2 = \frac{-2,1166}{-9,5} \simeq + 0,222$					

	x_3						
	a_{33}	a_{13}	a_{23}	a_{43}	a_{53}	a_{63}	a_{73}
	+ 7,5	0	+ 1,5	0	− 1,5	+ 2,0	− 1,7
α	1	0	− 0,2	0	+ 0,2	− 0,267	+ 0,227
	+ 6,1000	–	–	–	–	–	–
	− 1,0000 / + 5,1000	–	− 1,0000	–	–	–	–
	− 0,3720	–	+ 0,4330	–	− 0,0630	+ 0,1330	− 0,8750
	+ 0,2935	–	+ 0,1520	–	− 0,2820	+ 0,3900	+ 0,0245
	− 0,1287	–	− 0,0337	–	+ 0,0300	0,0000	− 0,1250
	0,0000	–	0,0000	–	0,0000	0,0000	0,0000
	+ 4,8928						

$$x_3 = \frac{4,8928}{7,5} \simeq + 0,625$$

	x_4						
	a_{44}	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{54}	a_{64}	a_{74}
	− 5,0	0	+ 1,0	0	+ 2,0	0	− 1 5
α	1	0	+ 0,2	0	+ 0,4	0	− 0,3
	− 2,0000	–	–	–	–	–	–
	+ 0,3280 / − 1,6720	− 0,1690	+ 0,4970	–	–	–	–
	− 0,0580	+ 0,2030	− 0,2160	–	− 0,1180	–	+ 0,7030
	− 0,6311	− 0,0710	− 0,0756	–	− 0,5280	–	− 0,0204
	+ 0,1434	− 0,0337	+ 0,0168	–	+ 0,0563	–	+ 0,1040
	0,0000	0,0000	0,0000	–	0,0000	–	0,0000
	− 2,2177						

$$x_4 = \frac{-2,2177}{-5} \simeq + 0,442$$

x_5						
a_{55}	a_{15}	a_{25}	a_{35}	a_{45}	a_{65}	a_{75}
+ 9,0	+ 2,0	0	+ 1,6	+ 3,0	— 2,0	+ 3,5
α 1	— 0,222	0	— 0,178	— 0,333	+ 0,222	— 0,389
+ 1,5000	-	-	-	-	-	-
— 1,1450 / + 0,3550	-	— 1,4950	+ 1,0200	— 0,6700	-	-
+ 1,5847	-	+ 0,6480	— 0,0745	— 0,0232	— 0,0576	+ 1,0920
— 0,1691	-	+ 0,2280	+ 0,0585	— 0,2520	— 0,1730	— 0,0306
+ 0,0405	-	— 0,0504	— 0,0267	+ 0,0574	0,0000	+ 0,1740
0,0000	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
+ 1,8111						

$$x_5 = \frac{1,8111}{9,0} \simeq + 0,201$$

x_6						
a_{66}	a_{16}	a_{26}	a_{36}	a_{46}	a_{56}	a_{76}
+ 8,0	+ 0,7	— 4,0	— 2,3	0	+ 1,0	— 2,0
α 1	— 0,0875	+ 0,5	+ 0,288	0	— 0,125	+ 0,25
+ 3,0000	-	-	-	-	-	-
— 2,5390 / + 0,4610	— 0,5080	— 0,7500	— 1,3600	-	+ 0,0790	-
+ 1,3860	+ 0,6100	+ 0,3240	+ 0,1000	-	+ 0,3520	-
— 0,0228	— 0,0212	+ 0,1140	— 0,0781	-	— 0,0375	-
— 0,0919	— 0,1010	— 0,0252	+ 0,0343	-	0,0000	-
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	0,0000	-
+ 1,7323						

$$x_6 = \frac{1,7323}{8} \simeq + 0,217$$

	x_7						
	a_{77}	a_{17}	a_{27}	a_{37}	a_{47}	a_{57}	a_{67}
	+ 5,0	0	— 1,0	+ 1,2	— 1,0	— 1,5	0
α	1	0	+ 0,2	— 0,24	+ 0,2	+ 0,3	0
	+ 3,0000	-	-	-	-	-	-
	+ 0,6410 / + 3,6410	+ 0,2540	— 1,2500	+ 1,1600	+ 0,5000	— 0,1380	+ 0,1150
	— 0,1021	— 0,3050	+ 0,5400	— 0,0845	+ 0,0174	— 0,6160	+ 0,3460
	+ 0,5217	+ 0,0106	+ 0,1900	+ 0,0665	+ 0,1890	+ 0,0656	0,0000
	— 0,0637	+ 0,0505	— 0,0420	— 0,0292	— 0,0430	0,0000	0,0000
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	+ 3,9969	$x_7 = \frac{3,9969}{5,0} = 0,797$					

Nota: O processo indicado corresponde a aplicação do método de Cross a um sistema hiperstático de nós sujeitos só a rotações. Da extensão do método de Cross a sistemas com nós sujeitos também a translações, os autores deduzem outro método de resolução de sistemas de equações lineares em *duas etapas*. A aplicação deste último processo pode ser vantajosa na resolução de sistemas para os quais os elementos α_{mn} da 2.ª linha dos quadros sejam aproximadamente iguais à unidade; a resolução do problema pelo processo indicado, em *uma etapa*, é então mais demorada, devido à convergência muito lenta das séries *do método*, nesse caso.

C. D. 518.3 : 624.92.012.4

Nomogramas para o cálculo de secções rectangulares de betão armado

Por ANTÓNIO LOPEZ NIETO

(Da Revista de Obras Públicas) — Fevereiro 1953, n.º 2854

Os nomogramas apresentados apoiam-se nas equações da teoria clássica do betão armado: hipóteses de Hooke e de Navier considerando-se que o betão não trabalha à tracção.

O autor dividiu o campo de variação da excentricidade em três partes dando assim lugar à construção de três grupos de três nomogramas, todos de manejo análogo, a saber:

A) Compressão axial com flexão: toda a secção trabalha à compressão.

B) Flexão com compressão axial: a secção trabalha à compressão e à tracção.

C) Flexão com tracção axial: a secção trabalha à compressão e à tracção.

Os nomogramas do grupo B), agora publicados, resolvem os seguintes problemas:

1) Dadas as restantes variáveis, determinar as tensões de trabalho do betão e do aço.

2) Dadas as dimensões e as tensões admissíveis, determinar as armaduras de maneira que as tensões admissíveis sejam as de trabalho.

3) Dadas as dimensões e as tensões admissíveis, achar as secções de armadura de modo que, atingindo-se a tensão admissível no betão, a sua soma seja mínima.

4) Dadas as tensões admissíveis e { uma dimensão / a relação altura-largura } determinar { a outra dimensão / as duas dimensões } e as armaduras, de modo que a sua secção seja mínima e as tensões de trabalho sejam as admissíveis.

5) Dadas as tensões admissíveis e { uma dimensão / a relação altura-largura }

determinar $\begin{cases} \text{a outra dimensão} \\ \text{as duas dimensões} \end{cases}$ e as armaduras, de modo que o custo da secção seja um mínino.

(São dados comuns a todos eles, sem especificar em cada caso, solicitação, recobrimento da armadura de compressão de forma aproximada pelo menos, e coeficiente de equivalência).

No grupo B) interessam sobretudo, na prática, os problemas 1) e 3).

Os nomogramas do grupo D), que juntamente com os do grupo B) se publicam agora, servem, como o seu título indica, para a determinação do braço do binário das forças elásticas de maneira rigorosa nas secções em que o esforço cortante máximo se dá na linha neutra ou nas suas proximidades.

Notações e unidades

c — altura útil da secção
b — largura da secção
a' — recobrimento da armadura de compressão
q — percentagem de armadura de tracção
q' — percentagem de armadura de compressão
X — distância da fibra neutra ao bordo comprimido
B — braço do binário das forças elásticas
A — tensão unitária da armadura de tracção
H — tensão unitária máxima produzida no betão
r — coeficiente de equivalência.

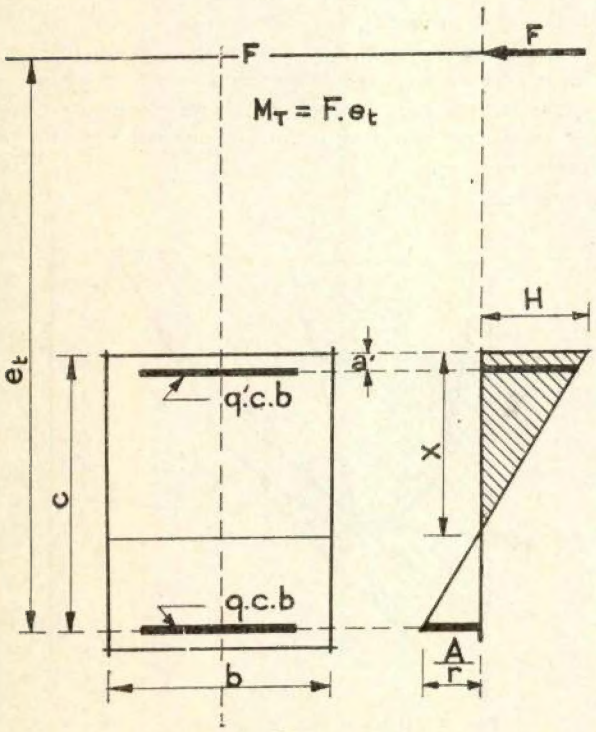


Fig 1

Como de costume, reduz-se a solicitação dada pela análise, no caso da flexão composta, a uma força conhecida em posição e intensidade, sendo:

F — intensidade da força
e_t — excentricidade da força em relação à armadura de tracção
e_c — excentricidade da força em relação à armadura de compressão.

Em consequência:

S — secção da armadura de tracção $= q \,.\, c \,.\, b$
S' — secção da armadura de compressão $= q' \,.\, c \,.\, b$
M_T — momento da força em relação à armadura de tracção $= F \,.\, e_t$
M_c — momento da força em relação à armadura de compressão $= F \,.\, e_c$

Deve utilizar-se como unidade de comprimento a mesma em cada secção e deduzir desta e da unidade de força adoptada as unidades derivadas para as tensões e momentos, e da primeira, a unidade de superfície.

As variáveis de entrada nos nomogramas são:

Nomogramas B):

$$r\,(q + q')\,;\; r \,.\, q'\,;\; \frac{A}{r \,.\, H}\,;\; \frac{M_T}{b \,.\, c^2 \,.\, H}\,;\; \frac{e_t}{c}$$

Nomogramas D):

$$r \,.\, q'\,;\; \frac{A}{r \,.\, H}\,;\; \frac{B}{c}$$

Como se vê são adimensionais.

Não intervém nestas variáveis o recobrimento a' porque está posto em função da altura útil, fazendo $a' = \beta \,.\, c$, em que β é um número fixo em cada nomograma. Escolheu-se $\beta = 0{,}05$; $\beta = 0{,}08$; $\beta = 0{,}11$, valores para cada um dos quais se construiu um nomograma; isto permite-nos, dado o recobrimento e a altura, achar $\beta = \frac{a'}{c}$, e, considerando os três valores anteriores de β como médios das três regiões:

$$0{,}035 \leqslant \beta \leqslant 0{,}065\,;\; 0{,}065 \leqslant \beta \leqslant 0{,}095 \quad 0{,}095 \leqslant \beta \leqslant 0{,}125$$

respectivamente, que abrangem todos os casos possíveis, visto ser dentro de cada um dos casos despresável a diferença dos resultados que se obteriam com o recobrimento correspondente a um valor extremo de β e o recobrimento obtido com o valor central — por não superar o erro próprio de leitura nos nomogramas, salvo na zona restrita e de escasso interesse prático que corresponde a secções com a fibra neutra nas proximidades da armadura de compressão —, podemos assimilar qualquer recobrimento ao do valor central da região que lhe corresponde e operar no nomograma respectivo prescindindo deste valor e sem efectuar interpolação alguma entre cada dois.

Os nomogramas B) são formados por duas escalas rectilíneas paralelas cotadas em $r\,(q + q')$ e $\frac{e_t}{c}$, que limitam o nomograma, e por três famílias de curvas cotadas em $r \,.\, q'$; $\frac{A}{r \,.\, H}$; $\frac{M_T}{b \,.\, c^2 \,.\, H}$ que se distribuem no interior do mesmo. Todo o ponto do interior deste nomograma tem três cotas, já que por ele passam três curvas: $r \,.\, q'$; $\frac{A}{r\,H}$; $\frac{M_T}{b \,.\, c^2 \,.\, H}$ que, ou se lêm directamente ou se interpolam a olho entre as duas curvas mais próximas de cada família. Portanto determinado

um ponto por intersecção de duas curvas, podemos ler a cota na terceira curva que por ele passa, e, também, determinado um ponto por alinhamento qualquer de leitura e uma das curvas podemos ler as cotas das outras duas.

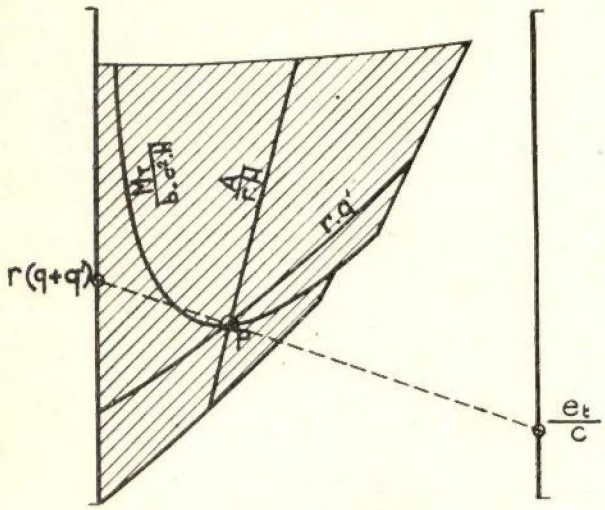


Fig 2 — Comprovação de tensões

Vamos concretizar o manejo destes nomogramas para os problemas que são capazes de resolver.

1) Dados: a', r, b, c, q, q', M_T, e_t
Incógnitas: A, H

Determinamos $\beta = \frac{a'}{c}$ e, consequentemente, o nomograma que devemos empregar.

Achamos $r \cdot q'$; $r(q + q')$ e $\frac{e_t}{c}$ que são as variáveis de entrada nos monogramas neste caso. O alinhamento defenido por dois pontos de cotas $r(q + q')$ e $\frac{e_t}{c}$, situados nas escalas extremas, corta a curva $r \cdot q'$ num ponto P (ver fig. 2) pelo qual passam duas curvas cotadas em $\frac{A}{r \cdot H}$ $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$.

Lidos os valores destas expressões no nomograma, obtemos, operando na segunda, H, e introduzindo este valor na primeira, A.

2) Dados: a', r, b, c, M_T, e_t, e A e H admissíveis.
Incógnitas: q, q'

Determinamos como no caso 1) $\beta = \frac{a'}{c}$ e o nomograma a usar. As curvas cotadas em $\frac{A}{r\,H}$ e $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ determinam, pela sua intersecção, um ponto, por ele passa uma terceira curva $r \cdot q'$, que lemos. O alinhamento definido pelo ponto de intersecção de $\frac{A}{r \cdot H}$; $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ e o ponto de cota $\frac{e_t}{c}$; situado na escala correspondente corta a escala de $r(q + q')$ noutro ponto cuja cota passa a ser conhecida. Obtidos assim $r \cdot q'$ e $r \cdot (q + q')$, noutro ponto cuja cota passa a ser conhecida. Obtidos assim $r \cdot q'$ e $r \cdot (q + q')$, com facilidade achamos q e q' e, finalmente, S e S', áreas das armaduras.

3) Dados: a', r, b, c, M_T, e_t, e A e H admissíveis.
Incógnitas: q e q' tais que $q + q'$ seja um mínimo.

Determinamos, como nos casos anteriores, o nomograma e as variáveis de entrada $\frac{e_t}{c}$ e $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$.

Do ponto $\frac{e_t}{c}$ traçamos a tangente à curva $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ (Ver fig. 3).

Pelo ponto de tangência P passam duas curvas de cotas $\frac{A}{r \cdot H}$ e $r \cdot q'$, que lemos; assim como a cota do ponto de intersecção da tangente, alinhamento da leitura, com a escala $r(q + q')$; evidentemente, pode comprovar-se que, para os dados do problema, este valor é um mínimo e, portanto, a soma das secções de armadura é também um mínimo; por último conhecidos $r \cdot q'$ e $r(q + q')_{min.}$, achamos essas armaduras. Devemos, partindo do valor $\frac{A}{r \cdot H}$ lido sob o ponto de tangência P, obter o de A resultante, sendo H a tensão admissível no betão, necessitando-se, para validez do resultado encontrado, que o valor de A assim determinado seja menor ou igual ao admissível, o que sucede quase sempre para valores de excentricidade afastados do caso de flexão simples. Caso contrário o problema reduz-se ao 2).

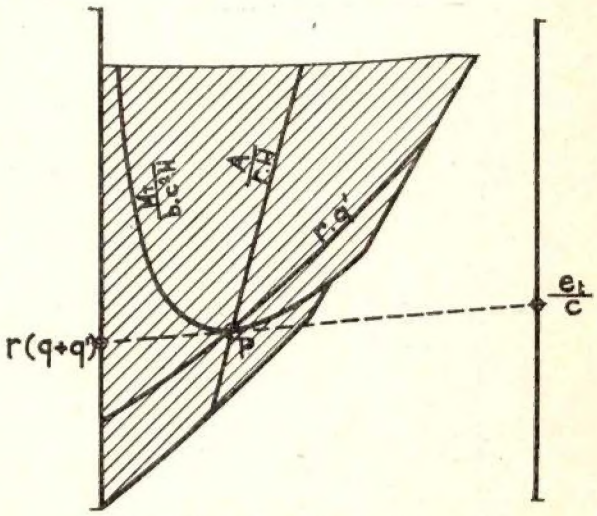


Fig. 3 — Determinação da armadura mínima

4) Dados: β, r, M_T, e_t, e A e H admissíveis e um dos três valores seguintes: c, b, $\frac{c}{b}$.

Incógnitas: q, q' e um dos seguintes valores em correspondência com os três dados anteriormente: b, c ou b e c, simultâneamente; tais,

que as tensões de trabalho, sejam admissíveis e que $q + q'$ seja um mínimo para a secção obtida.

Determinamos $\frac{A}{r \cdot H}$ e $\frac{e_t}{c}$, em que tomamos para c, se é incógnita, o valor suposto no dimensionamento anterior à análise. Movemos uma régua transparente, de maneira que um dos seus lados passe pelo ponto $\frac{e_t}{c}$ até que o alinhamento definido por aquele lado passando por este ponto seja sensìvelmente tangente a uma curva $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ no seu ponto de intersecção com a recta do nomograma de cota $\frac{A}{r \cdot H}$ (A e H são as tensões admissíveis, dados do problema). Definido assim o alinhamento da leitura lemos os valores de $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, $r \cdot q'$ e $r\ (q + q')_{min}$; os dois primeiros nas curvas respectivas que passam pelo ponto de intersecção desse alinhamento com a recta $\frac{A}{r \cdot H}$, e o terceiro, na intersecção do alinhamento com a escala $r \cdot (q + q')$, encontrando portanto, seguidamente, as dimensões e secções dos ferros.

Este problema, ainda que às vezes de soluções muito convenientes, noutros casos, quando os pares $\frac{e_t}{c}$ e $\frac{A}{r \cdot H}$ são tais que a posição do alinhamento de tangência corresponde a curvas de cota elevada em $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, dá secções de aço muito elevadas, o que reduz o seu interesse.

5) Com os mesmos dados que no problema anterior calcular as mesmas incógnitas, com a condição de que o preço da secção resultante, incluindo betão, ferro e a parte da cofragem função do perímetro, seja mínimo.

Desde o ponto $\frac{e_t}{c}$ traçamos três ou quatro alinhamentos, de leitura, tangentes a outras tantas curvas quaisquer $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$. Cada alinhamento determina-nos, lendo as cotas das curvas $r \cdot q'$; $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ e $\frac{A}{r \cdot H}$ que passam pelo ponto de tangência e a sua intersecção com a escala $r\ (q + q')$, as dimensões, armaduras e tensões duma secção e portanto, mediante um cálculo auxiliar, o seu custo.

Traçando sobre um sistema cartesiano, em abcissas, os valores das curvas $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ tangentes aos alinhamentos traçados e em ordenadas os preços respectivos das secções resultantes e traçando a curva determinada por estes pontos (v. fig. 4), podemos obter o valor de que nos dá uma secção de custo mínimo.

Convém comprovar as tensões que não podem ser superiores às admissíveis. Por ser o preço dos ferros muito superior ao do betão, resulta que o preço mínimo corresponde a secções com a menor armadura possível; sucede, às vezes, que sendo elevado o preço de cofragem, tal mínimo corresponde a uma secção medianamente armada.

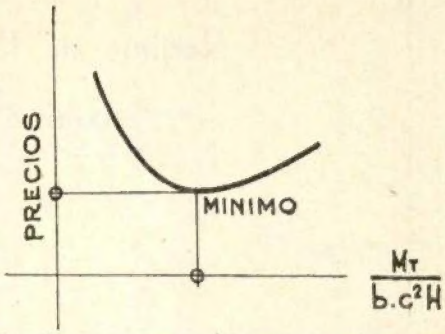


Fig. 4 — Determinação da secção de mínimo custo

Os nomogramas D) são formados por duas escalas rectilíneas perpendiculares cotadas em $r \cdot q'$ e $\frac{B}{c}$, e uma escala curvilínea cotada em $\frac{A}{r \cdot H}$. Sendo o seu emprego posterior ao dos nomogramas estudados conhecemos sempre $r \cdot q'$ e $\frac{A}{r \cdot H}$. O seu manejo reduz-se (v. fig. 5) a traçar o alinhamento que passa por dois pontos cotados em $r \cdot q'$ e $\frac{A}{r \cdot H}$ e ler a intersecção da mesma com a escala $\frac{B}{c}$, donde se tira B.

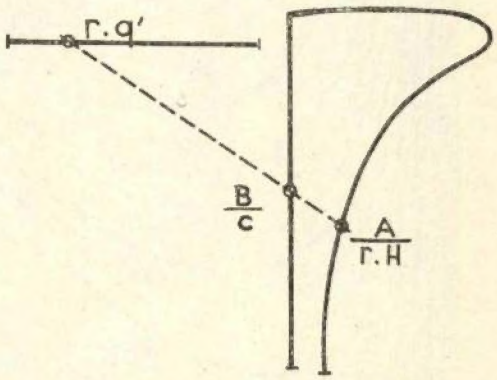


Fig. 5 — Determinação do braço do binário das forças elásticas

Exemplos

1.º) Dados: $a' = 2$ cm; $r = 10$; $b = 26$ cm; $c = 50$ cm; $q = 0{,}0182$; $q' = 0{,}01$; $M_T = 1.050.000$ kg cm; $e_t = 500$ cm

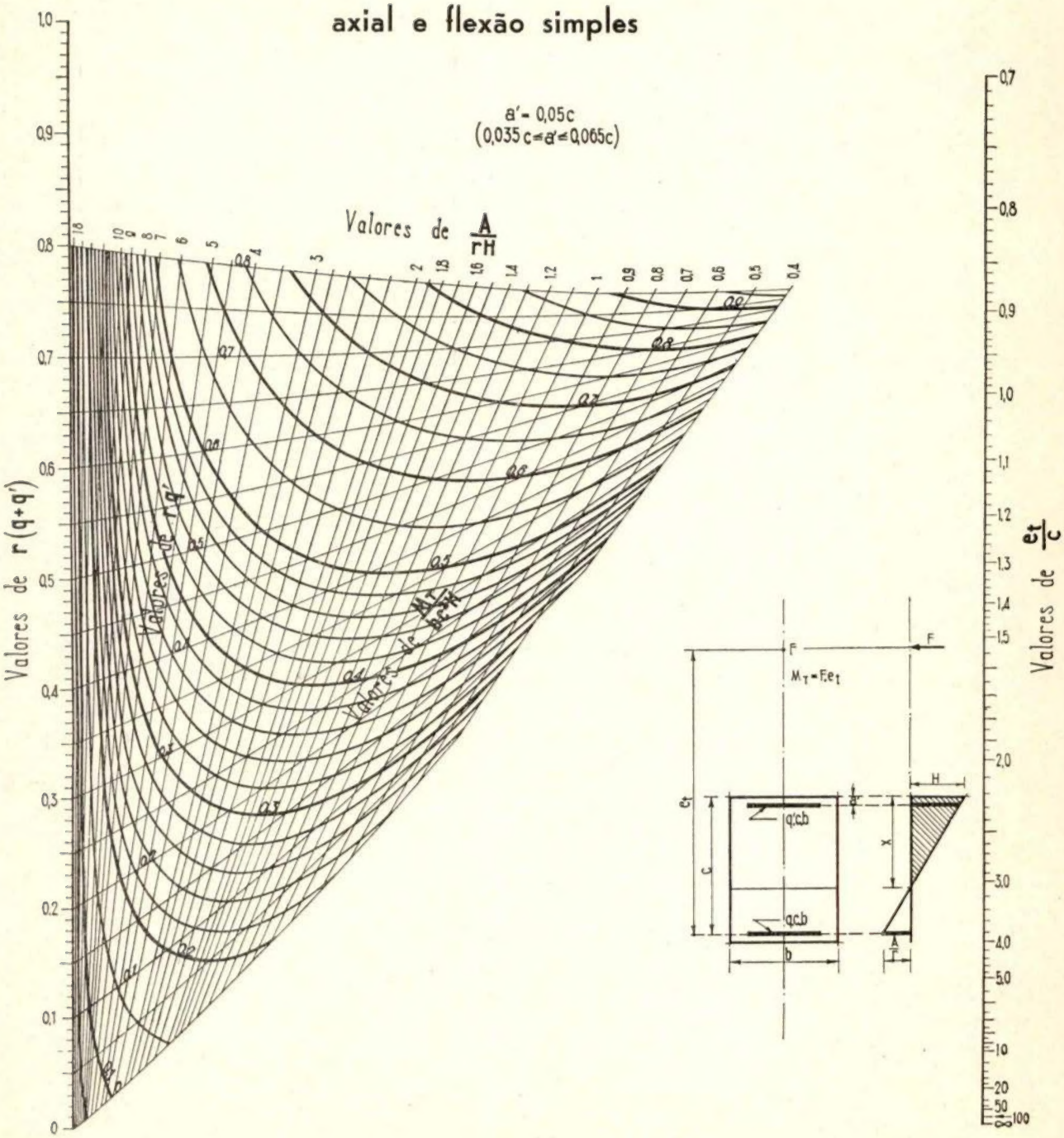
Incógnitas: A e H

$$\beta = \frac{2}{50} = 0{,}04 \simeq 0{,}05$$

portanto usar-se-á o nomograma 1. Determinamos:

$$r \cdot q' = 0{,}1\ ;\quad r\ (q + q') = 0{,}282\ ;\quad \frac{e_t}{c} = 10$$

①

Regime de flexão com compressão axial e flexão simples

B)